

Numerische Untersuchung von
instationären Stoß-Grenzschicht
Interaktionen und
Validierung des zweidimensionalen
kompressiblen Navier-Stokes Verfahrens
für beliebige Geometrien

Andreas Babucke

Diplomarbeit

Betreuer:
Dipl.-Ing. A. Pagella
Privatdozent Dr.-Ing. U. Rist,
Institut für Aero- und Gasdynamik
Universität Stuttgart

Oktober 2002

Zusammenfassung

Diese Arbeit gliedert sich in zwei Bereiche: die Stoß-Grenzschicht-Interaktion eines instationären Stoßes und die Erweiterung des numerischen Verfahrens auf beliebige Wandkonturen.

Die Untersuchungen der Stoß-Grenzschicht-Interaktionen erfolgen mittels einer Simulation der vollständigen, zweidimensionalen Navier-Stokes Gleichungen einer laminaren, ebenen Plattengrenzschicht. Die Störungsanregung wird durch einen periodisch oszillierenden Stoßwinkel erzielt, wobei der Stoß gemäß den Rankine-Hugoniot-Beziehungen am Freistromrand eingeleitet wird. In den beiden Raumrichtungen kommen kompakte finite Differenzen hoher Ordnung zur Anwendung, wobei deren Vorwärts- und Rückwärtsdiskretisierung alternierend erfolgt. Kurzwellige numerische Oszillationen, die sich aufgrund der starken Gradienten über dem Stoß aus der räumlichen Diskretisierung ergeben, werden durch einen impliziten Filter 4. Ordnung gedämpft. Die zeitliche Integration wird durch ein Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung berechnet. Das Strömungsfeld außerhalb der Grenzschicht zeigt ein deutliches Interferenzmuster der Dichtestörungen, das sich aus den Wellen der Störanregung und deren Reflexion an der Wand ergibt. Innerhalb der Grenzschicht können drei unterschiedliche Störwellen identifiziert werden. Das Abschalten der Störanregung ermöglicht den Nachweis von Tollmien-Schlichting-Wellen, die recht gut mit den Erwartungen der linearen Stabilitätstheorie übereinstimmen.

Die Erweiterung des Verfahrens auf beliebige Wandkonturen erfolgt durch eine Transformation des äquidistanten Rechengitters auf ein in der physikalischen Ebene gestrecktes Gitter, wofür die Randbedingungen entsprechend angepaßt werden müssen. Die Gittergenerierung erfolgt durch analytische Funktionen. Die Validierung zeigt Probleme am Ausströmrand, die sich jedoch stromauf nicht auswirken. Erste physikalische Ergebnisse werden anhand der stationären Strömung über einer Kompressionsrampe gezeigt.

Häufig verwendete Formelzeichen

a	Schallgeschwindigkeit
CFL	Courant-Friedrichs-Levy Zahl
c_f	Wandschubspannung
c_v	spez. Wärmekapazität bei konstantem Volumen
E	Gesamtenergie der Strömung
L	Referenzlänge für Normierung
Ma	Machzahl
p	Druck
Pr	Prandtl Zahl, hier $Pr = 0.71$
\mathbf{Q}	Vektor der konservativen Variablen
\mathbf{q}	Wärmestromvektor
q_x, q_y	Komponenten des Wärmestromvektors
r	Recovery-Faktor
Re	globale Reynolds-Zahl, hier $Re = 10^5$
Re_x	lokale Reynolds-Zahl
R_x	Wurzel der Reynoldszahl
T	Temperatur
T_s	Sutherland-Temperatur
t	Zeit
Δt	Schrittweite der Zeit
u	Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung
v	Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung
Δx	Schrittweite in x -Richtung
Δy	Schrittweite in y -Richtung
δ_{99}	Grenzschichtdicke
δ_{sa}	Grenzschichtdicke am Stoßauftreffpunkt
η	Transformierte y -Koordinate
ϑ	Wärmeleitfähigkeit
μ	dynamische Zähigkeit
ξ	Transformierte x -Koordinate
σ	Stoßwinkel
ρ	Dichte
τ	Spannungen
ω_0	Frequenz der Störanregung

Indizes

∞	Werte der ungestörten Anströmung
T	transformierte Größen
W	Strömungsgrößen an der Wand
1	Strömungsgrößen vor dem einfallenden Stoß
2	Strömungsgrößen nach dem einfallenden Stoß
*	dimensionsbehaftete Größen

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Häufig verwendete Formelzeichen	2
1 Einleitung	5
2 Verwendete Gleichungen	8
2.1 Normierung	8
2.2 Allgemeine Gleichungen	8
2.3 Kennzahlen	10
3 Numerisches Verfahren	11
3.1 Diskretisierung in x-Richtung	11
3.2 Diskretisierung in y-Richtung	12
3.3 Zeitdiskretisierung	13
3.4 Wahl der Schrittweiten	13
3.5 Integrationsgebiet	14
3.6 Randbedingungen	14
3.6.1 Oberer Rand	14
3.6.2 Einström- und Ausströmrand	16
3.6.3 Wand	16
3.7 Anfangs- und Stoßrandbedingungen	17
3.7.1 Anfangsbedingungen	17
3.7.2 Stoßrandbedingung	17
3.7.3 Instationäre Stoßrandbedingung	18
4 Ergebnisse	20
4.1 Ergebnisse der Störrechnung	20
4.1.1 Instationäre Stoßrandbedingung	20
4.1.2 Instabilitätswellen	29
4.2 Gittertransformation	38
4.2.1 Transformierte Gleichungen	38
4.2.2 Randbedingungen	39
4.2.3 Gittergenerierung	40
4.2.4 Validierungsrechnungen	44
4.2.5 Kompressionsrampe	48

5 Zusammenfassung und Ausblick	51
5.1 Oszillierender Stoßwinkel	51
5.2 Gittertransformation	52
Literaturverzeichnis	53
A Maximale Amplituden der Störrechnung	55
A.1 Kleine Amplitude von 0,25 Grad	55
A.2 Große Amplitude von 0,5 Grad	58
B Wellenzahlen der Instabilitätswellen	61
C Vergleich mit der linearen Stabilitätstheorie	64

Kapitel 1

Einleitung

In Überschallströmungen ergeben sich Wechselwirkungen zwischen den auftretenden Verdichtungsstößen und der Wandgrenzschicht. Diese sind verantwortlich für Effekte wie z.B. Widerstandserhöhung, Ablösung oder hohen Temperatur- bzw. Wärmelasten. Bei praktisch allen Strömungen, in denen zumindest lokal Überschallströmung vorliegt, sind Stoß-Grenzschicht-Interaktionen von Bedeutung. Dies ist z.B. der Fall in Düsen, beim Wiedereintritt von Raumfahrzeugen oder Triebwerkseinläufen. Anhand von Abbildung 1.1, die den Überschallflug eines T-38 Flugzeuges bei Mach 1.1 zeigt, sieht man, daß die auftretenden Stöße das Strömungsfeld stark beeinflussen.

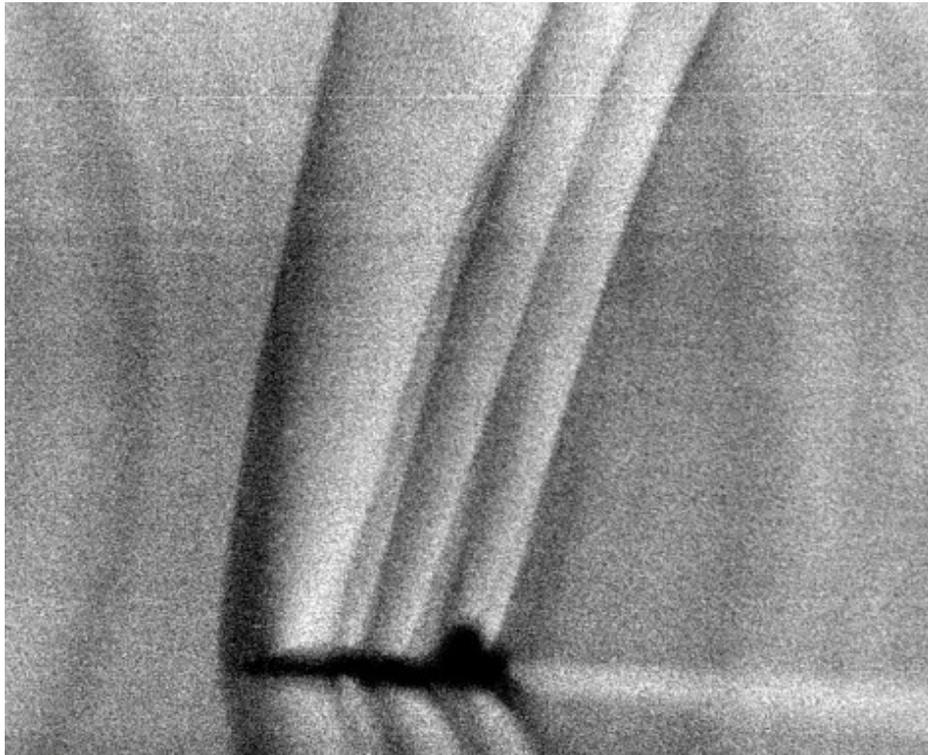


Abbildung 1.1: Schlierenfotografie einer T-38 bei Mach 1.1 in 4 km Höhe („Photo Collection“, NASA Dryden Flight Research Center [21])

Die physikalischen Phänomene der Stoß-Grenzschicht-Interaktion (siehe Schlichting [18]) sind in Abbildung 1.2 schematisch dargestellt. Man sieht deutlich, wie sich die Grenzschicht durch den aufgeprägten Druck nach dem Verdichtungsstoß am Auftreffpunkt aufdickt. Das Anwachsen der Grenzschicht führt infolge der Verdängungswirkung zu einem Druckanstieg, was ein weiteres Anwachsen der Grenzschicht zur Folge hat. Bei einer hinreichenden Stoßstärke führt diese Wechselwirkung schließlich zur Ablösung. Durch die Umlenkung der Strömung am Stoß nimmt die Grenzschichtdicke nach dem Auftreffpunkt wieder ab, was dort zu einem Expansionsfächer führt. Ab dem Bereich des Wiederanlegepunktes wächst die Grenzschicht wieder an. Die dadurch verursachte Umlenkung der Strömung bewirkt Kompressionswellen, die wie am Ablösepunkt weiter außerhalb zu einem Verdichtungsstoß zusammenlaufen. Charakteristisch ist eine Plateauzone im Wanddruckverlauf zwischen Ablösepunkt **A** und Wiederanlegepunkt **W** (siehe Abbildung 1.3).

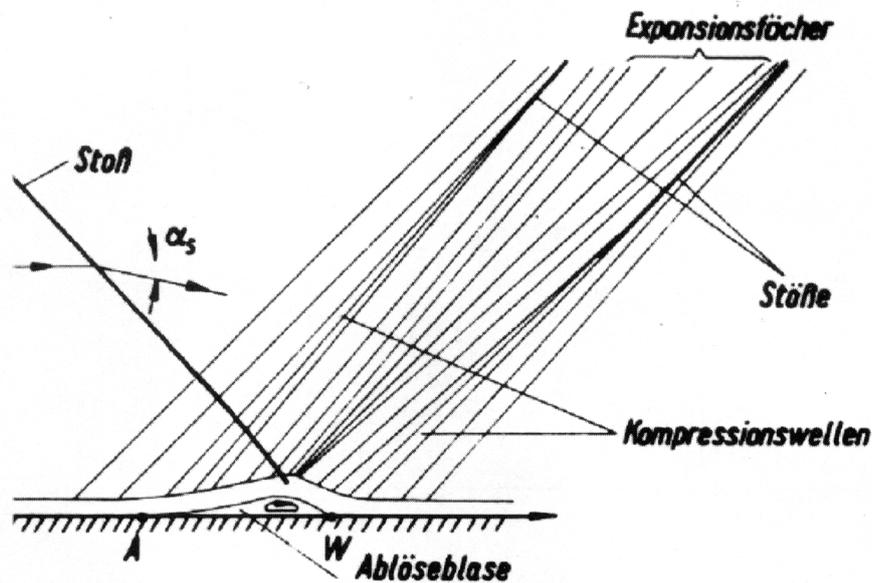


Abbildung 1.2: Schema der physikalischen Phänomene der Stoß-Grenzschicht-Interaktion („Führer durch die Strömungslehre“ [16])

Abbildung 1.4 zeigt die physikalischen Phänomene bei einer Überschallströmung über einer Kompressionsrampe. Um den Knick herum bildet sich eine Ablöseblase. Aufgrund der Verdrängungswirkung führt dies zu einer Kompression. Die Umlenkung im Bereich des Wiederanlegepunktes erfolgt durch eine weitere Verdichtung. Auch hier stellt sich bei einem genügend großen Rampenwinkel der charakteristische Plateauverlauf im Wanddruck gemäß Abbildung 1.3 ein.

Die Stöße entstehen an einem Flugkörper, wie er in Abbildung 1.1 zu sehen ist, durch eine Umlenkung der Strömung. Insbesondere im Bereich des Lufteinlaufs treffen Verdichtungsstöße auf die Wandgrenzschicht. Aufgrund von Störungen im Flug, wie z.B. einem nicht konstanten Anstellwinkel, kann sich ein variabler Stoßwinkel ergeben. Die Auswirkungen eines auf die Wandgrenzschicht auftreffenden oszillierenden Stoßes werden in Abschnitt 4.1 untersucht. Die Untersuchung der Stoßentstehung erfordert eine Erweiterung

des bisherigen Verfahrens (beschrieben in Abschnitt 4.2). Als Beispiel einer beliebigen Wandgeometrie wird die Strömung über einer Kompressionsrampe betrachtet.

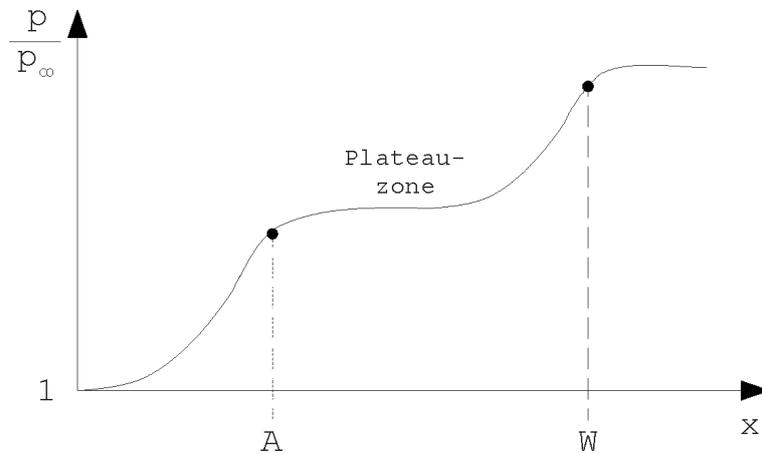


Abbildung 1.3: Schematischer Verlauf des Wanddrucks über einer Lauflänge x bei Stoß-Grenzschicht-Interaktionen mit Ablösung. A bezeichnet hierbei den Ablösepunkt, W den Wiederanlegepunkt. (nach Schlichting [18])

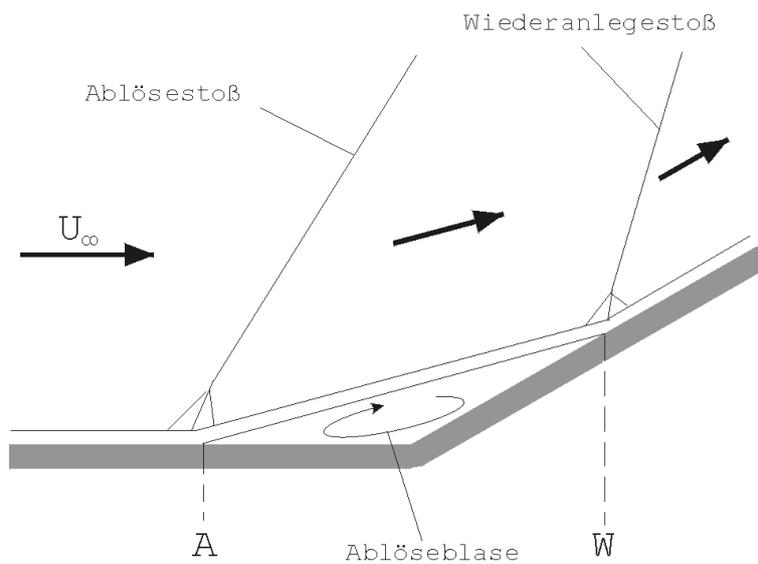


Abbildung 1.4: Schema der physikalischen Phänomene an einer Kompressionsrampe A bezeichnet hierbei den Ablösepunkt, W den Wiederanlegepunkt.

Kapitel 2

Verwendete Gleichungen

2.1 Normierung

Längen werden mit der Referenzlänge L , und Geschwindigkeiten mit der Anströmgeschwindigkeit U^*_∞ normiert. Die Zeit t^* , die Wärmekapazität c_v^* und der Druck p^* werden folgendermaßen normiert:

$$t = \frac{t^* \cdot U^*_\infty}{L^*} \quad (2.1)$$

$$c_v = \frac{c_v^* \cdot T^*_\infty}{U^*_\infty{}^2} \quad (2.2)$$

$$p = \frac{p^*}{\rho^*_\infty U^*_\infty{}^2} \quad (2.3)$$

Der obere Index „*“ kennzeichnet hierbei dimensionsbehaftete Größen, die Anströmgrößen werden mit dem Index „ ∞ “ markiert. Die weiteren Größen Dichte ρ , Temperatur T und Viskosität μ werden mit den jeweiligen Anströmwerten ρ_∞ , T_∞ bzw. μ_∞ normiert. Die Normierung der Störfrequenz erfolgt gemäß:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot \omega_0^* \cdot L^*}{U^*_\infty \cdot Re} \quad (2.4)$$

2.2 Allgemeine Gleichungen

Das Verfahren von Eißler [5] baut auf den Navier-Stokes-Gleichungen für instationäre und kompressible Strömungen auf. Verwendet wurde das vereinfachte zweidimensionale Verfahren, dieses hat sich sowohl ohne als auch mit Stößen sehr gut bewährt (Pagella [14]).

Das strömende Fluid wird als thermisch ideales Gas mittels der thermischen Zustandsgleichung modelliert:

$$T = \frac{p \cdot \kappa \cdot Ma_\infty^2}{\rho} \quad (2.5)$$

Die Gleichungen werden in konservativer Form notiert. Damit ergibt sich der Vektor der konservativen Variablen \mathbf{Q} zu:

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T \quad (2.6)$$

Wie üblicherweise notiert, ist ρ die Dichte, u bzw. v sind die Geschwindigkeitskomponenten in x- bzw. y-Richtung und E bezeichnet die Energie, welche sich durch Integration über den gesamten Temperaturbereich gemäß Gl. 2.7 berechnet.

$$E = \rho \int_T c_v(T) dT + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) \quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnen T die Temperatur und c_v die Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

Aus der Kontinuitätsgleichung, aus den Impulserhaltungsgleichungen in x- und y-Richtung sowie aus der Energiegleichung ergibt sich in vektorieller Schreibweise:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ u(E + p) + q_x - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

und

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ v(E + p) + q_y - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Die Normalspannungen lauten hierbei:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

$$\tau_{yy} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.12)$$

und die Schubspannung ergibt sich gemäß:

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.13)$$

Der Wärmestromvektor setzt sich aus den Wärmeströmen in x- und y-Richtung zusammen:

$$\mathbf{q} = (q_x, q_y)^T \quad (2.14)$$

Dessen Komponenten berechnen sich zu:

$$q_x = - \frac{\vartheta}{(\kappa - 1) Re Pr_\infty Ma_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$q_y = - \frac{\vartheta}{(\kappa - 1) Re Pr_\infty Ma_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.16)$$

Dabei bezeichnen μ die dynamische Zähigkeit und ϑ die Wärmeleitfähigkeit, welche proportional zu μ sei.

Die Berechnung der Stofftransportgrößen μ und ϑ erfolgt unter Annahme einer konstanten Prandtlzahl (hier: $Pr = 0.71$) durch das Sutherland-Gesetz [9]:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2} \frac{T_\infty + T_s}{T + T_s}, \quad T_s = 110.4K \quad (2.17)$$

Falls die Anströmtemperatur kleiner als die Sutherland-Temperatur ist, wird linear interpoliert.

2.3 Kennzahlen

Dimensionslose Beiwerte beschreiben die Ähnlichkeit der Strömung und sind wichtige Größen bei Vergleichen mit realen Experimenten. Eine wichtige Größe ist die globale Reynoldszahl, die mit der charakteristischen Länge L gebildet wird und hier stets $Re = 10^5$ sein soll.

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} \quad (2.18)$$

Über die Lauflänge x entlang der Platte läßt sich eine lokale Reynoldszahl Re_x definieren:

$$Re_x = \frac{\rho_\infty U_\infty x L}{\mu_\infty} = x Re \quad (2.19)$$

Zum Zwecke der Anschaulichkeit wird des weiteren die x -Koordinate mit der Wurzel der Reynoldszahl, die in der kompressiblen, linearen Stabilitätstheorie häufig verwendet wird, folgendermaßen normiert:

$$R_x = \sqrt{x Re} \quad (2.20)$$

Die Bedeutung liegt zum einen darin, daß die Grenzschichtdicke δ_{99} der ungestörten laminaren Strömung ohne einfallendem Stoß über der ebenen Platte gemäß der Grenzschichttheorie (Schlichting [18]) linear über R_x anwächst. Des weiteren ist R_x die dimensionslose Koordinate in Strömungsrichtung, die bei später benötigte Vergleichsrechnungen zur linearen Stabilitätstheorie verwendet wird.

Kapitel 3

Numerisches Verfahren

3.1 Diskretisierung in x-Richtung

Die Diskretisierung in x -Richtung erfolgt gemäß Eißler [5] an $N + 1$ äquidistanten Stützstellen. Für den Ort x gilt somit:

$$x = x' + n\Delta x, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (3.1)$$

wobei x' hier der Ort des Beginns der Rechnung sei, und Δx die Schrittweite.

Die ersten Ableitungen werden gemäß Gottlieb und Turkel [7] mit gesplitteten, kompakten Finiten Differenzen gebildet, wobei Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen alternierend verwendet werden. Sie lauten als Vorwärtsdifferenz:

$$5 \frac{\partial \phi_{k,n-1,+}}{\partial x} + 13 \frac{\partial \phi_{k,n,+}}{\partial x} + 5 \frac{\partial \phi_{k,n+1,+}}{\partial x} = \frac{23}{276\Delta x} (-80\phi_{k,n-1} - 102\phi_{k,n} + 168\phi_{k,n+1} + 14\phi_{k,n+2}) \quad (3.2)$$

bzw. als Rückwärtsdifferenz:

$$5 \frac{\partial \phi_{k,n-1,-}}{\partial x} + 13 \frac{\partial \phi_{k,n,-}}{\partial x} + 5 \frac{\partial \phi_{k,n+1,-}}{\partial x} = \frac{23}{276\Delta x} (-14\phi_{k,n-2} - 168\phi_{k,n-1} + 102\phi_{k,n} + 80\phi_{k,n+1}) \quad (3.3)$$

Am Einströmrand und einen Gitterpunkt davon entfernt kommen einseitige Differenzen zur Anwendung, die folgendermaßen definiert sind:

$$\frac{\partial \phi_{k,0}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (-3\phi_{k,0} + 4\phi_{k,1} - \phi_{k,2}) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \phi_{k,0}}{\partial x} + 8 \frac{\partial \phi_{k,1}}{\partial x} + 6 \frac{\partial \phi_{k,2}}{\partial x} = \frac{15}{180\Delta x} (-43\phi_{k,0} - 80\phi_{k,1} + 108\phi_{k,2} + 16\phi_{k,3} - \phi_{k,4}) \quad (3.5)$$

Am Ausströmrand verwenden wir zentrale Differenzen 2. Ordnung:

$$\frac{\partial \phi_{k,N-1}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (-\phi_{k,N-2} + \phi_{k,N}). \quad (3.6)$$

Das aus den Gleichungen (3.2), (3.3) und (3.5) resultierende tridiagonale Gleichungssystem wird durch den Thomas-Algorithmus gelöst. Zweite Ableitungen ergeben sich durch nochmaliges Ableiten der ersten Ableitung.

Finite Differenzen haben die Eigenschaften, bei großen Gradienten, wie sie insbesondere bei Stößen auftreten, numerische Oszillationen zu erzeugen. Diese können im schlimmsten Fall zeitlich anwachsen und dadurch das Verfahren zum Absturz bringen. Um diese Oszillationen zu dämpfen wurde bereits in einer früheren Arbeit [15] ein Filter 4. Ordnung nach Lele [12] implementiert.

Krause [11] hat in seiner Arbeit den Einfluß dieses Filters eingehend untersucht und festgestellt, daß bereits bei einer relativ schwachen Dämpfung die numerischen Oszillationen ausreichend gedämpft werden, ohne Ergebnisse zu verfälschen.

3.2 Diskretisierung in y -Richtung

Die Diskretisierung des Integrationsgebiet in y -Richtung erfolgt analog zu der Diskretisierung in x -Richtung an $M + 1$ äquidistanten Stützstellen. Im Unterschied zur x -Richtung ist der untere Rand des Rechengebietes durch die Wand definiert, so daß für die y -Koordinate gilt:

$$y = m \Delta y, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (3.7)$$

mit Δy als der Schrittweite in y -Richtung.

Bei der Diskretisierung in y -Richtung unterscheiden wir zwischen konvektiven und viskosen Termen (Terme zweiter Ableitung). Bei viskosen Termen kommen zentrale Differenzen 4. Ordnung zur Anwendung:

$$\frac{\partial \phi_{k,m}}{\partial y} = \frac{1}{12\Delta y} (\phi_{k,m-2} - 8\phi_{k,m-1} + 8\phi_{k,m+1} - \phi_{k,m+2}) \quad (3.8)$$

Die notwendigen zweiten Ableitungen berechnen sich durch nochmaliges Differenzieren der ersten Ableitungen, wie dies bei der Diskretisierung in x -Richtung der Fall ist.

Die Diskretisierung konvektiver Terme erfolgt durch einseitige Differenzen gemäß Gottlieb und Turkel [7], wobei wie bei der Diskretisierung in x -Richtung abwechselnd Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen verwendet werden. Die Vorwärtsdifferenz lautet:

$$\frac{\partial \phi_{k,m,+}}{\partial y} = \frac{1}{6\Delta y} (-7\phi_{k,m} + 8\phi_{k,m+1} - \phi_{k,m+2}) \quad (3.9)$$

und die Rückwärtsdifferenz ist definiert durch:

$$\frac{\partial \phi_{k,m,-}}{\partial y} = \frac{1}{6\Delta y} (\phi_{k,m-2} - 8\phi_{k,m-1} + 7\phi_{k,m}) \quad (3.10)$$

Am wandnächsten Punkt sind die Gleichungen (3.8) bis (3.10) nicht anwendbar, deshalb gilt hier für dissipative Terme Gl. (3.11) und für konvektive Terme Gl. (3.12).

$$\frac{\partial \phi_{k,1}}{\partial y} = \frac{1}{60\Delta y} (-12\phi_{k,0} - 65\phi_{k,1} + 120\phi_{k,2} - 60\phi_{k,3} + 20\phi_{k,4} - 3\phi_{k,5}) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \phi_{k,1}}{\partial y} = \frac{1}{6\Delta y} (-3\phi_{k,0} - 3\phi_{k,1} + 10\phi_{k,2} - 5\phi_{k,3} + \phi_{k,4}) \quad (3.12)$$

Am Freistromrand wird an den Gitterpunkten $m = M - 1$ eine zentrale Differenz 2. Ordnung angewandt:

$$\frac{\partial \phi_{k,M-1}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta y} (-\phi_{k,M-2} + \phi_{k,M}) \quad (3.13)$$

an der Stelle $m = M$ kommt eine einseitige Differenz 2. Ordnung zur Anwendung:

$$\frac{\partial \phi_{k,M}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta y} (\phi_{k,M-2} - 4\phi_{k,M-1} + 3\phi_{k,M}) \quad (3.14)$$

Allerdings bildet man hierbei die Ableitungen nicht an $x = \text{const.}$ sondern entlang der Charakteristik $C^+ = \frac{\partial x}{\partial y}$ (siehe Abschnitt 3.6.1).

Die Approximation der y -Ableitung an der Wand ($m = 0$) erfolgt durch eine einseitige Differenz, wobei diese nur für die Berechnung des Druckes benötigt wird.

$$\frac{\partial p_{k,0}}{\partial y} = \frac{1}{60\Delta y}(-137p_{k,0} - 300p_{k,1} + 300p_{k,2} - 200p_{k,3} + 75p_{k,4} - 12p_{k,5}) \quad (3.15)$$

3.3 Zeitdiskretisierung

Die Zeitdiskretisierung erfolgt vergleichbar der räumlichen Diskretisierung in äquidistanten Zeitschritten. Hierbei gilt:

$$t = l \cdot \Delta t \quad (3.16)$$

mit dem Zeitschritt $l \geq 0$ und der Schrittweite Δt .

Die zeitliche Integration erfolgt mittels des Runge-Kutta Verfahrens 4. Ordnung (Kloker [10]). Die räumlichen Ableitungen des Gleichungssystems (2.8) werden zu

$$-\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial y} \quad (3.17)$$

zusammengefaßt. Hierbei stellt \mathbf{Q} den Vektor der konservativen Strömungsgrößen, die zu berechnen sind, dar. Die zeitliche Integration ergibt sich damit mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens 4. Ordnung zu:

$$\mathbf{Q}_k^{1+\frac{1}{2}*} = \mathbf{Q}_k^1 + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{R}_{k,+/-}^1 \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Q}_k^{1+\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}_k^1 + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{R}_{k,-/+}^{1+\frac{1}{2}*} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{Q}_k^{1+1*} = \mathbf{Q}_k^1 + \Delta t \mathbf{R}_{k,+/-}^{1+\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{Q}_k^{1+1} = \mathbf{Q}_k^1 + \Delta t \left(\frac{1}{6}\mathbf{R}_{k,+/-}^1 + \frac{1}{3}\mathbf{R}_{k,-/+}^{1+\frac{1}{2}*} + \frac{1}{3}\mathbf{R}_{k,+/-}^{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\mathbf{R}_{k,-/+}^{1+1*} \right) \quad (3.21)$$

Wie bereits in den Abschnitten 3.1 und 3.2 erwähnt, kommen bei der x - und der y -Diskretisierung alternierende Differenzen zum Einsatz. Bei jedem Runge-Kutta Teilschritt wechselt die Diskretisierungsrichtung, d.h. auf eine vorwärtsgerichtete Differenz folgt eine rückwärtsgerichtete bzw. umgekehrt.

3.4 Wahl der Schrittweiten

Mittels der Courant-Friedrichs-Levy-Zahl (kurz CFL-Zahl) läßt sich der Zeitschritt in Abhängigkeit der Schrittweiten in x - und y -Richtung abschätzen. Die CFL-Zahl stellt ein Maß für die numerische Stabilität hyperbolischer Differentialgleichungen dar und sollte deutlich unter 1 liegen. Nach Adams [1] ist sie folgendermaßen definiert:

$$CFL = \Delta t * S_{max} \quad (3.22)$$

mit

$$S_{max} = \max \left(\left(\frac{|u| + Ma}{\Delta x} + \frac{|v| + Ma}{\Delta y} \right)^2 + \left(d_{max} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

wobei das Maximum über alle Gitterpunkte zu ermitteln ist:

$$d_{max} = \max \left(\frac{\mu}{Re \rho}, \frac{\mu}{(\kappa - 1) Ma_{\infty}^2 Pr Re \rho} \right). \quad (3.24)$$

3.5 Integrationsgebiet

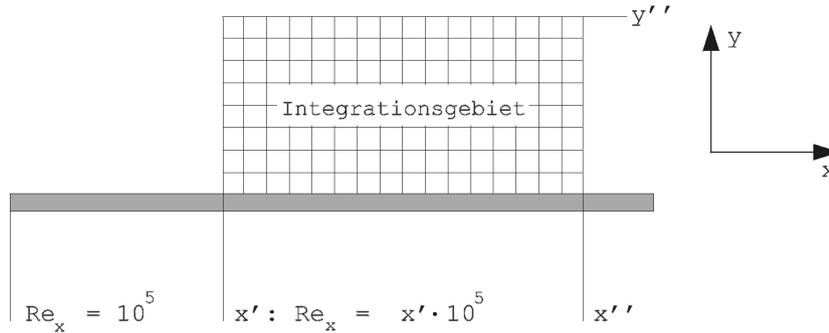


Abbildung 3.1: Integrationsgebiet

Abbildung 3.1 zeigt das verwendete Integrationsgebiet. In x -Richtung beginnt die Rechnung an der vorgegebenden Stelle x' . Die Endkoordinate x'' ergibt sich aus der Länge des Rechengebietes und damit aus der Anzahl der Gitterpunkte in x -Richtung und der Gitterschrittweite Δx . Die Höhe des Integrationsgebietes y'' ergibt sich analog zur x -Richtung durch die Anzahl der Gitterpunkte in y -Richtung und die Schrittweite Δy .

3.6 Randbedingungen

3.6.1 Oberer Rand

Beim oberen Rand wird davon ausgegangen, er sei ein Freistromrand, d.h. daß er hinreichend weit von der Grenzschichtströmung entfernt ist, so daß von einer Potentialströmung ausgegangen werden kann. Dabei hat sich die charakteristische Randbedingung nach Harris [8] bewährt, die von Eißler [5] in das Verfahren implementiert wurde. Hierbei werden die Strömungsgrößen entlang der Charakteristiken konstant gesetzt.

Um die Reflektion von aus dem Integrationsgebiet auf den Freistromrand zulaufenden Wellen zu verhindern, wird die ausfallende Charakteristik C^+ betrachtet (Abbildung 3.2). Diese definiert sich zu:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_+ = \tan(\beta + \alpha) \quad (3.25)$$

mit der Strömungsrichtung

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \quad (3.26)$$

und dem Mach'schen Winkel relativ zur Strömungsrichtung

$$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right) \quad (3.27)$$

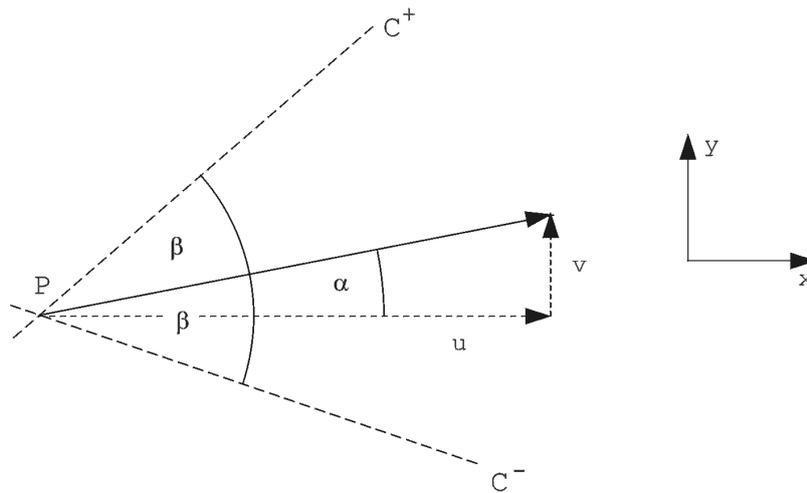


Abbildung 3.2: Charakteristiken C^+ und C^- am Punkt P in der x - y Ebene

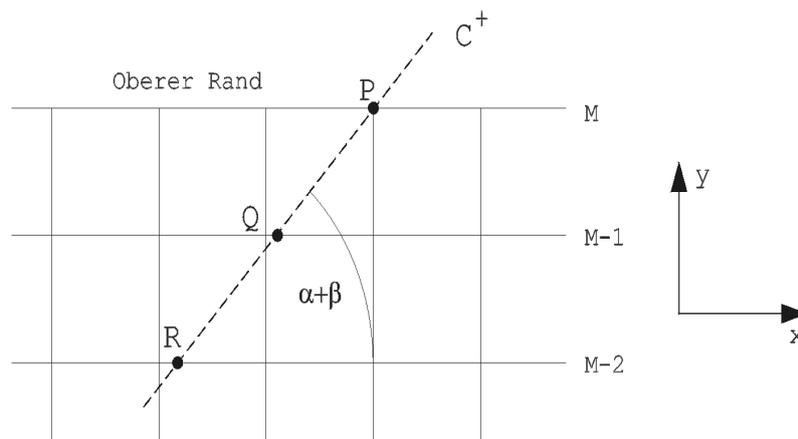


Abbildung 3.3: Implementierung der charakteristischen Randbedingung

Gemäß Eißler [5] beträgt der Grad der Reflexion bei der charakteristischen Randbedingung ca. 4%. Die Randbedingung wurde dabei folgendermaßen implementiert:

Aufgabe der Randbedingung am Freistromrand ist es, die Strömungsgrößen gemäß Abbildung 3.3 am Punkt P am oberen Rand zu berechnen. Hierzu wird zuerst der Mach'sche Winkel β und die Strömungsrichtung α bestimmt (siehe Abbildung 3.2). Ausgehend vom Punkt P läßt sich mit der Summe beider Winkel eine Gerade bilden, die die Gitterlinien einen bzw. zwei Gitterpunkte vom oberen Rand entfernt in den Punkten Q bzw. R schneidet. Die Strömungsgrößen an den Punkten Q und R werden anschließend durch lineare Interpolation zwischen den in x -Richtung links und rechts benachbarten Gitterpunkten berechnet.

Die Strömungsgrößen am Punkt P ergeben sich nun mittels einer einseitigen Differenz 2. Ordnung, wobei wie bereits oben erwähnt, die Ableitung entlang der Charakteristik C^+ null sein soll:

$$\frac{\partial \phi_P}{\partial C^+} = \frac{1}{2\Delta y}(\phi_R - 4\phi_Q + 3\phi_P) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \phi_P}{\partial C^+} = 0 \quad (3.29)$$

Dies ergibt schließlich:

$$\phi_P = \frac{1}{3}(4\phi_Q - \phi_R) \quad (3.30)$$

3.6.2 Einström- und Ausströmrand

Am Einströmrand werden die Strömungsgrößen durch einen bereits vorhandenen Grenzschichtlöser vorgegeben. Dieser berechnet die Strömungsgrößen unter Vorgabe von Prandtlzahl, Anströmmachzahl und -temperatur aus den kompressiblen Grenzschichtgleichungen [18] mittels eines Schießverfahrens, d.h. man muß Eingabeparameter wie z.B. die Grenzschichtdicke solange variieren, bis sich eine konvergierende Lösung einstellt.

Die Lösung ist gegenüber der lokalen Reynoldszahl Re_x normiert und wird mittels einer Streckung an die tatsächliche Reynoldszahl angepaßt. Die Strömungsgrößen an den diskreten Punkten berechnen sich durch eine quadratische Interpolation von der Ähnlichkeitskoordinate η auf den Wandabstand y . Die Ähnlichkeitskoordinate in wandnormaler Richtung ist definiert als:

$$\eta = y \cdot \frac{Re}{Re_x} \quad (3.31)$$

Um numerische Instabilitäten zu vermeiden, vernachlässigen wir am Ausströmrand die zweiten Ableitungen in x -Richtung. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in Bestek [4].

3.6.3 Wand

An der Wand gilt die Haftbedingung. Dies bedeutet, daß die Geschwindigkeitskomponenten in x - und y -Richtung gleich null sind:

$$u = v = 0 \quad (3.32)$$

Für die Temperatur an der Wand bestehen zwei Möglichkeiten der Randbedingung: Die erste ist eine konstante Wandtemperatur T_w . Für die ebene wärmeisolierte Wand ergibt sich für die Wandtemperatur:

$$\frac{T_W}{T_\infty} = 1 + r \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\infty^2 \quad (3.33)$$

hierbei bezeichnet r den sogenannten Recovery-Faktor, dieser ergibt sich in guter Näherung zu:

$$r = \sqrt{Pr} \quad (3.34)$$

Im anderen Fall berechnet sich die Wandtemperatur aus der Bedingung einer adiabaten Wand aus:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (3.35)$$

Der Wanddruck wird aus der v -Impulsgleichung berechnet. Dabei wird die y -Ableitung des Druckes durch Gleichung (3.15) ersetzt und anschließend nach p_w aufgelöst. Die Dichte ergibt sich aus der thermischen Zustandsgleichung:

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (3.36)$$

Die Energie berechnet sich entsprechend Gleichung (2.7).

3.7 Anfangs- und Stoßrandbedingungen

3.7.1 Anfangsbedingungen

Zu Beginn der Rechnung wird für das gesamte Integrationsgebiet eine laminare Grundströmung vorgegeben. Dies geschieht dadurch, daß die über R_x skalierten Strömungsgrößen des Grenzschichtlösers (siehe Abschnitt 3.6.2) auf das gesamte Integrationsgebiet übertragen werden. Alternativ können auch Ergebnisse einer vorherigen Rechnung zur Anwendung kommen, d.h. daß die Strömungsgrößen des letzten Zeitschritts vorgegeben werden.

3.7.2 Stoßrandbedingung

Der Stoß wird als Anfangsbedingung in den Freistromrand eingebracht. Da allerdings die charakteristische Randbedingung eine ungestörte Potentialströmung voraussetzt (siehe Abschnitt 3.6.2), welche bei Vorhandensein eines Stoßes natürlich nicht gegeben ist, ist es notwendig, die Randbedingung am Freistromrand aufzuteilen. In einem genügend großen Bereich (ca. 10 Gitterpunkte) vor dem Einleiten des Stoßes werden am oberen Rand die Strömungsgrößen der ungestörten Anströmung des aktuellen Zeitschritts verwendet. Auf ein ebenso großes Intervall nach dem Stoß definieren sich die Strömungsgrößen aus den Rankine-Hugoniot Beziehungen [20]. Dabei ist zu beachten, daß keine Störwellen in diesen Bereich des oberen Randes laufen sollten, da diese sonst reflektiert werden und somit das Ergebnis verfälschen.

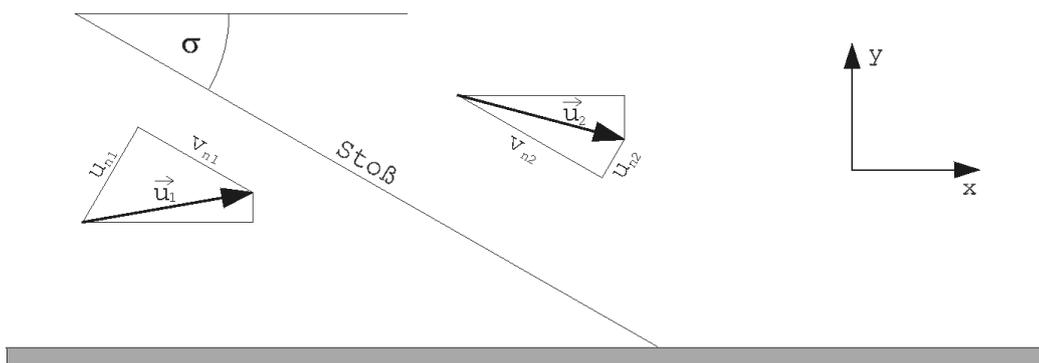


Abbildung 3.4: Implementierung der Rankine-Hugoniot Beziehungen

Um die Rankine-Hugoniot Beziehungen anwenden zu können, müssen die Anströmgeschwindigkeiten in ein Koordinatensystem normal und tangential zum Stoß gemäß Gleichungen (3.37) und (3.38) transformiert werden (siehe Abbildung 3.4).

$$u_{n1} = u_1 \sin(\sigma) + v_1 \cos(\sigma) \quad (3.37)$$

$$v_{t1} = u_1 \cos(\sigma) - v_1 \sin(\sigma) \quad (3.38)$$

Nach Berechnen der Größen nach dem Stoß werden diese wieder in das ursprüngliche $x - y$ Koordinatensystem zurück transformiert.

Entsprechend den Rankine-Hugoniot Beziehungen [20] gelten folgende Gleichungen, wobei der Index „1“ den Zustand vor und der Zustand „2“ den Zustand nach dem Stoß bezeichnet:

$$v_{t2} = v_{t1} \quad (3.39)$$

$$\frac{u_{n1}}{u_{n2}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{1}{Ma_1^2 \sin^2 \sigma} \right) \right]^{-1} \quad (3.40)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\kappa + 1} \left(\kappa Ma_1^2 \sin^2 \sigma - \frac{\kappa - 1}{2} \right) \quad (3.41)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (3.42)$$

3.7.3 Instationäre Stoßrandbedingung

Ziel dieser Arbeit ist es, den Einfluß eines oszillierenden Stoßes auf eine zweidimensionale Strömung und die daraus resultierenden Stoß-Grenzschicht Wechselwirkungen zu untersuchen. Krause [11] verwendete hierfür eine Dreiecksfunktion an, um die Position des Stoßes am oberen Rand zu variieren. Dies führte jedoch zu dem Problem, daß aufgrund der endlichen Gitterschrittweite der zeitliche Verlauf der Stoßposition sprunghaft erfolgte, was zu einer starken Emission von Störwellen numerischer Herkunft führte. Um dies zu vermeiden wird hier die Position des Stoßes am oberen Rand festgehalten und stattdessen der Stoßwinkel variiert. Die Oszillation des Stoßwinkels wird durch eine Sinusschwingung um den Nominalwert σ_0 erzielt:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\sigma \sin(\omega \cdot t) \quad (3.43)$$

mit der Amplitude $\Delta\sigma$ und der Frequenz ω . Der Vorteil dieser Art der Stoßoszillation ist der glatte Verlauf im Gegensatz zu der sprunghaften Positionsänderung bei Krause [11]. Der zeitliche Verlauf ist beispielhaft in Abbildung 3.5 dargestellt.

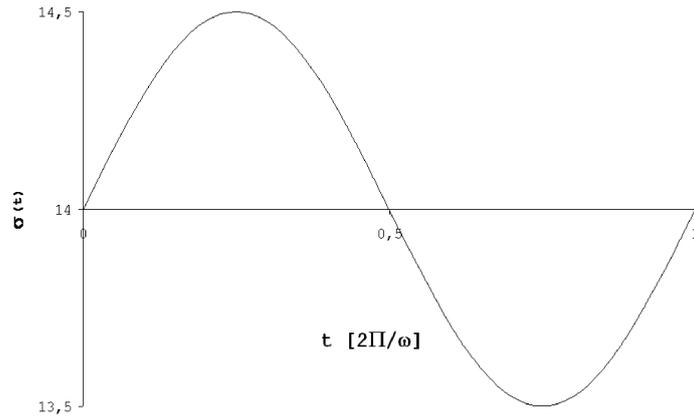


Abbildung 3.5: Zeitlicher Verlauf des Stoßwinkels bei einer Amplitude von $\Delta\sigma = 0,5^\circ$ und einem nominalen Stoßwinkel von $\sigma_0 = 14^\circ$

Der sich ergebende zeitliche Verlauf des Stoßwinkels wird dann in die Rankine-Hugoniot Beziehungen, Gleichungen (3.39) bis (3.42), eingesetzt. Die so eingeleitete Störung führt weniger zu einer Variation der Lage des Stoßes in der $x - y$ -Ebene als vielmehr zu einer Oszillation der Strömungsgrößen nach dem Stoß.

Kapitel 4

Ergebnisse

4.1 Ergebnisse der Störrechnung

Betrachtet wird eine Strömung mit der Anströmmachzahl von $Ma_\infty = 4.8$, der globalen Reynoldszahl $Re = 10^5$, einer konstanten Wandtemperatur von $T_w = 55.4K$ und einem nominalen Stoßwinkel von $\sigma_0 = 14^\circ$. Im reibungsfreien Fall würde der Stoß an der Stelle $R_x = 1389$ auf die Wand treffen. Wie bereits in Abschnitt 3.7.3 erwähnt, wird die Störung in Form eines oszillierenden Stoßwinkels eingebracht. Die dimensionslose Störfrequenz wurde dabei zu $\omega_0 = 10$ gewählt.

4.1.1 Instationäre Stoßrandbedingung

Die Oszillation des Stoßwinkels führt vor allem zu einer Variation der Größen nach dem Stoß gemäß den Gleichungen (3.39) bis (3.42). Eine merkliche Verzerrung der Stoßgeometrie ist bei den betrachteten Amplituden von 0.25° und 0.5° nicht erkennbar. Abbildung 4.1 zeigt Momentanbilder der Abweichung der Dichte von der Grundströmung bei einer Amplitude von 0.5° . Deutlich erkennbar sind die entlang des Stoßes nach unten laufenden Störwellen, die ihren Ursprung am oberen Rand entsprechend den Rankine-Hugoniot Beziehungen haben. Diese laufen bis zur Wand und werden dort reflektiert. Aus den Stoßwellen selbst und deren Reflexionen an der Wand ergibt sich stromabwärts des reflektierten Stoßes ein Interferenzmuster. In einem stationären Bereich vor dem Auftreffen des Verdichtungsstoßes auf die Grenzschicht zeigt sich im Vergleich zur ungestörten Strömung eine leicht geringere Dichte.

Abbildung 4.2 zeigt vergleichend die stationären und die gemittelten instationären Werte der Temperatur, der Dichte und des Druckes bei einer Amplitude von $\Delta\sigma = 0.5^\circ$. Bei allen drei Strömungsgrößen liegen die stationären und die instationären Konturlinien nahe beieinander. Auffallend ist, daß die Änderung dieser Strömungsgrößen im gemittelten instationären Fall weiter stromauf liegt, als dies bei der Grundströmung der Fall ist. Große Abweichungen ergeben sich erst mit zunehmender Lauflänge, insbesondere die Temperatur und der Druck weisen in der Nähe des rechten Randes erhebliche Abweichungen auf. Eine mögliche Erklärung hierfür kann der Einfluß des rechten Randes sein. Ein ähnliches Bild zeigt sich auch bei den Geschwindigkeitskomponenten in x - und y -Richtung, wie aus Abbildung 4.3 ersichtlich ist. Betrachtet man die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung, so sieht man nahe der Wand in einem $1400 \leq R_x \leq 1600$ eine deutliche Schwankung im Vergleich zu der Grundströmung.

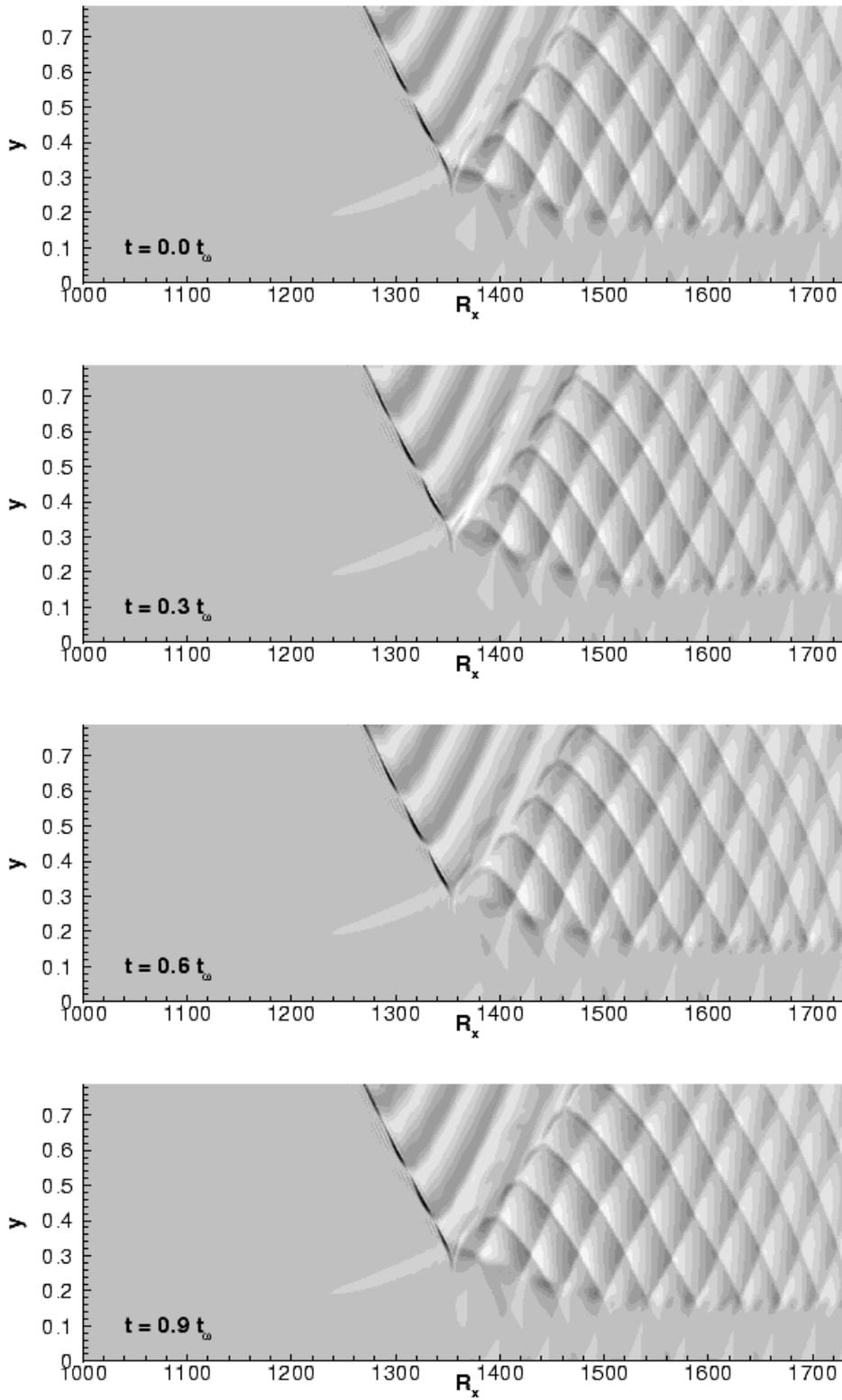


Abbildung 4.1: Momentanbilder der Dichtestörung bei einer Amplitude von $\Delta\sigma = 0.5^\circ$

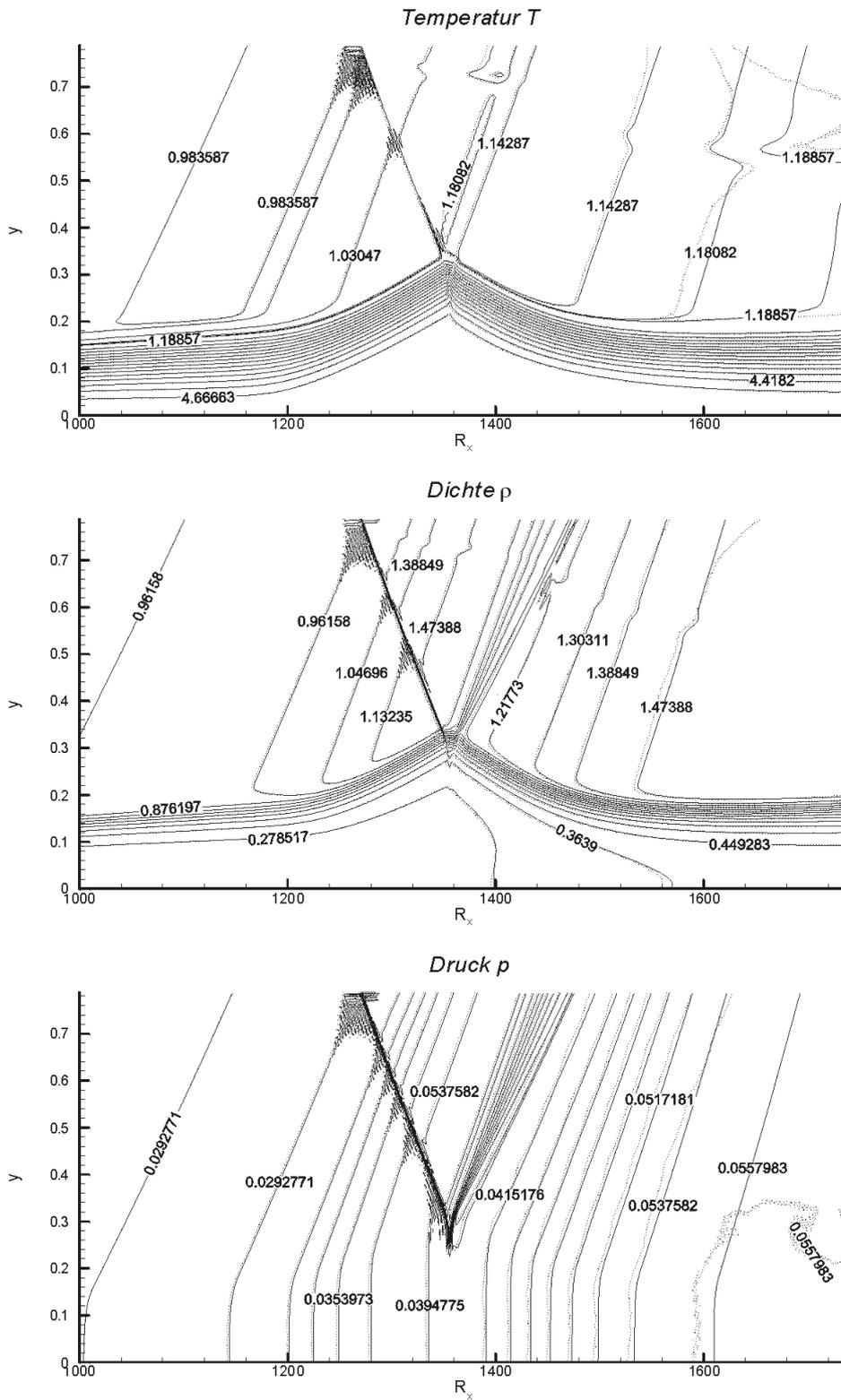


Abbildung 4.2: Vergleich der stationären (durchgezogene Linien) mit den gemittelten in-stationären Strömungsgrößen (gestrichelte Linien) bei einer Amplitude von $\Delta\sigma = 0.5^\circ$

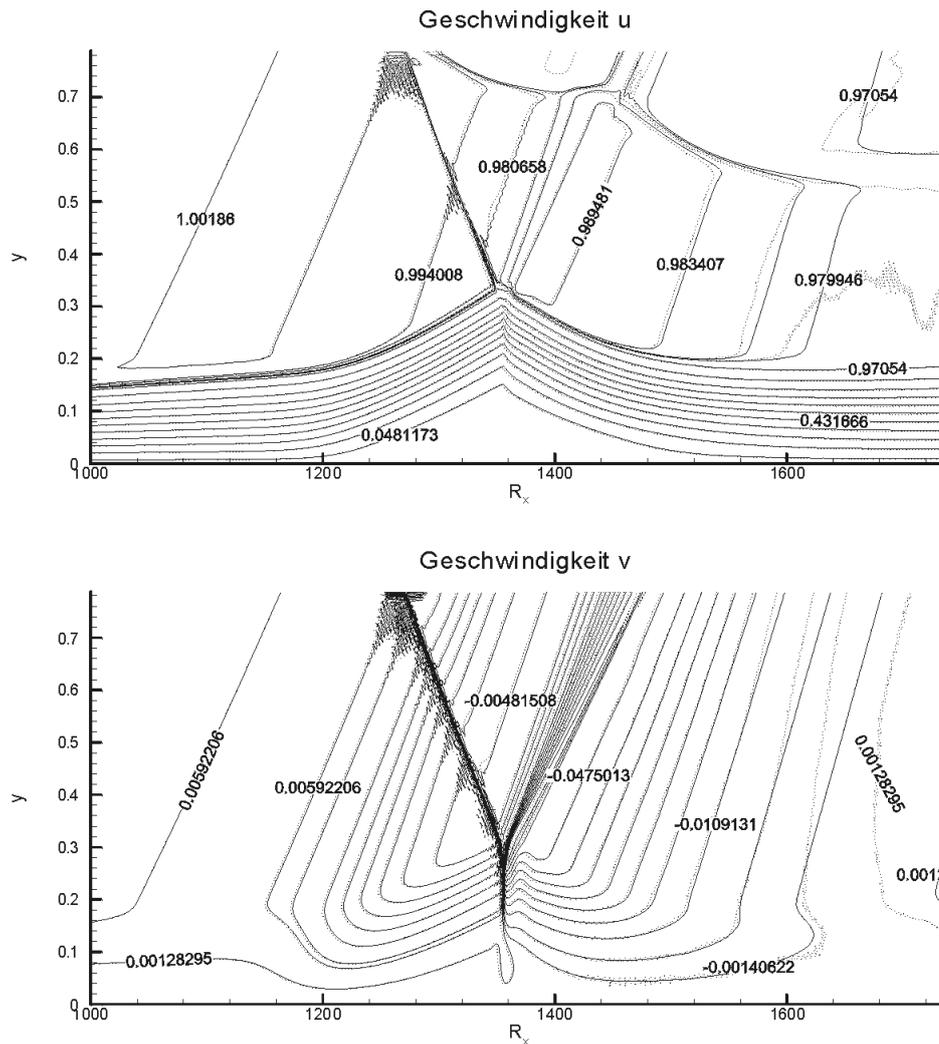


Abbildung 4.3: Vergleich der stationären (durchgezogene Linien) mit den gemittelten instationären Geschwindigkeitskomponenten (gestrichelte Linien) in x - und y -Richtung bei einer Amplitude von $\Delta\sigma = 0,5^\circ$

Der Vergleich der zeitlich gemittelten Werte der Wandschubspannung mit den stationären Werten (Abbildung 4.4) zeigt, daß die gemittelte Länge der Ablöseblase sich nicht wesentlich ändert, aber leicht nach vorne verschoben ist. Auch innerhalb der Ablöseblase ergibt sich ein nahezu identischer c_f -Verlauf, was darauf hindeutet, daß sich die Geometrie der Ablöseblase im zeitlichen Mittel nicht wesentlich ändert. Im Bereich $R_x \geq 1600$ ergibt sich ein deutliches Anwachsen der Wandschubspannung, welches allerdings durch den rechten Rand wieder reduziert wird.

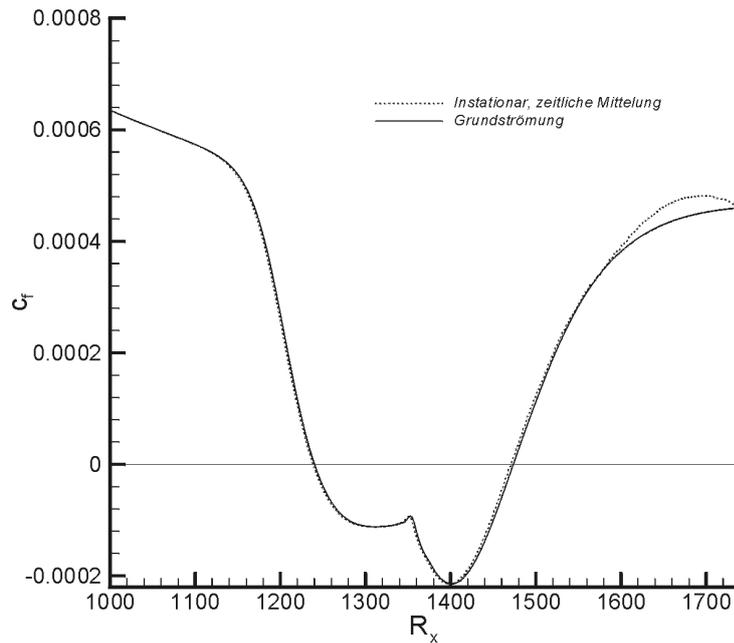


Abbildung 4.4: Stationärer und gemittelter instationärer Verlauf der Wandschubspannung bei einer Amplitude von $\Delta\sigma = 0,5^\circ$

4.1.1.1 Amplitudenvergleich

Um die Auswirkungen der Stör-Amplitude abschätzen zu können, wird die erste harmonische Frequenz aus der zeitlichen Fouriertransformation über der letzten Störperiode einmal bei einer kleinen Amplitude von 0.25° und einmal bei einer großen Amplitude von 0.5° betrachtet. Die Abbildungen 4.5 und 4.6, in denen die maximale Amplituden dargestellt sind, zeigen, daß die Größe der Stör-Amplitude nur Einfluß auf die Größenordnung hat, der prinzipielle Amplitudenverlauf über der Lauflänge ändert sich hierbei nicht.

Des Weiteren ist in diesen Diagrammen der Verlauf der Wandschubspannung der Grundströmung eingetragen. Die Position des starken Anwachsens der Amplituden hängt natürlich direkt mit der Position des Stoßes am oberen Rand zusammen. Ein weiteres leichtes Anwachsen der Amplituden ergibt sich kurz vor dem Auftreffpunkt des Stoßes bei $R_x \approx 1350$.

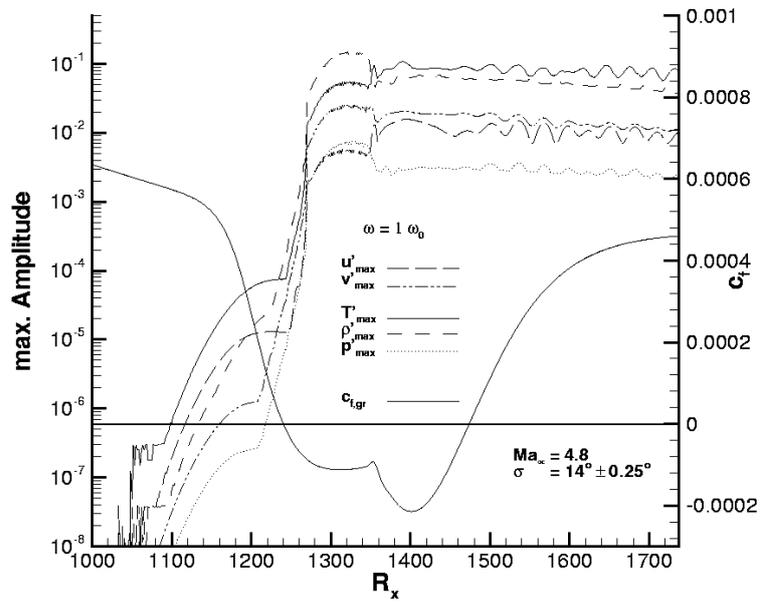


Abbildung 4.5: Maximale Amplituden der ersten harmonischen Frequenz bei einer Störamp-
plitude von $\Delta\sigma = 0.25^\circ$

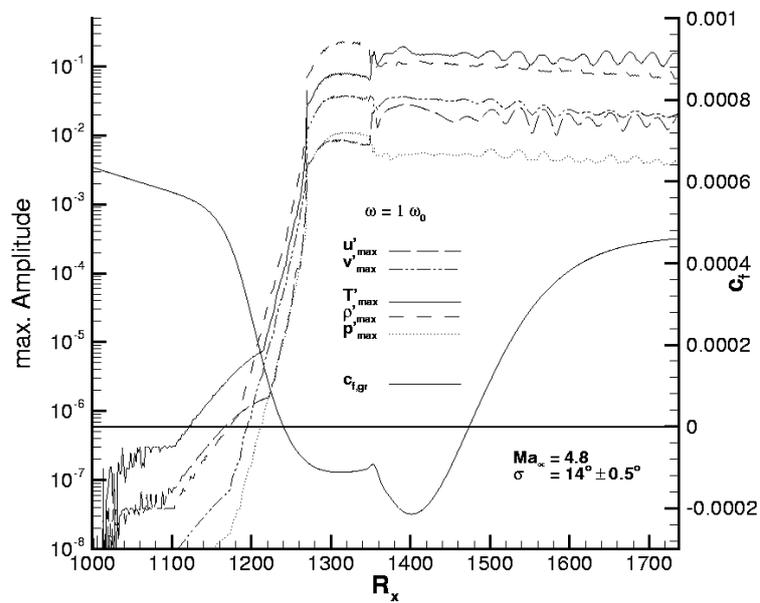


Abbildung 4.6: Maximale Amplituden der ersten harmonischen Frequenz bei einer Störamp-
plitude von $\Delta\sigma = 0.5^\circ$

In den Abbildungen 4.5 und 4.6 sieht man, daß das Verhältnis der maximalen Amplituden der einzelnen Strömungsgrößen zueinander der Reihenfolge entspricht, wie sie sich laut Eißler [5] und Pagella [15] auch bei einer Störانregung durch Einblasen an der Wand ergeben: die größte Amplitude weist die Temperatur auf, gefolgt von der Dichte. Die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung weist bei der ersten Harmonischen eine größere Amplitude als die in x -Richtung auf. Die geringsten Störungen ergeben sich beim Druck. Dies liegt auch am Wert des Anströmdrucks, der einen vergleichsweise geringen Zahlenwert aufweist. Eine Ausnahme dieser Reihenfolge findet man im Bereich zwischen dem Ablösepunkt ($c_f = 0$) und dem Auftreffpunkt des Stoßes, hier weist die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung zahlenmäßig die kleinste Amplitude auf, wächst dann aber beim Auftreffpunkt des Stoßes nochmals um ca. eine Zehnerpotenz an.

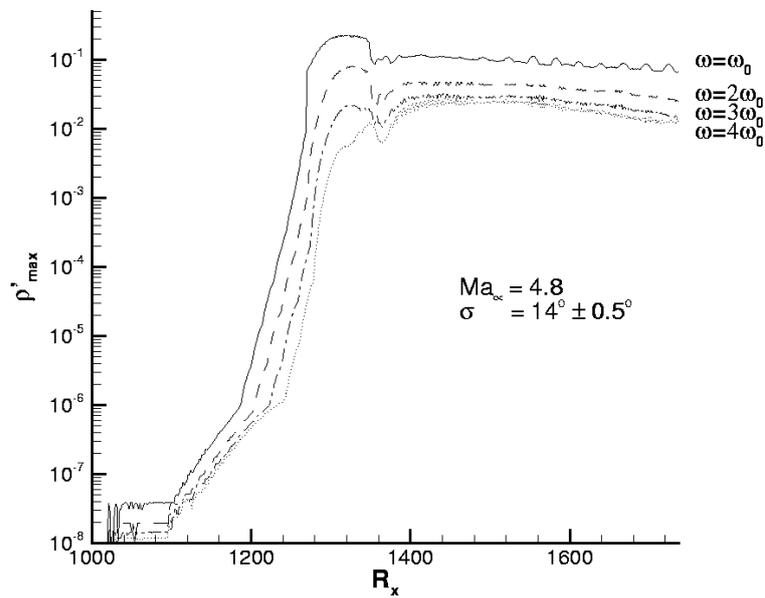


Abbildung 4.7: Maximale Amplituden der ersten 4 harmonischen Frequenzen der Dichtestörungen bei einer Störampplitude von $\Delta\sigma = 0.5^\circ$

Betrachtet man die höherharmonischen Amplituden einer Strömungsgröße, so sieht man, daß zwar hauptsächlich die Grundfrequenz, aber auch höherharmonische Frequenzen angeregt werden, wie beispielhaft anhand der Dichte in Abbildung 4.7 erkennbar ist. Die höherharmonischen Frequenzen weisen einen ähnlichen Verlauf wie die Grundfrequenz auf. Ab einer Stelle von $R_x \approx 1520$ werden die Dichtestörungen leicht gedämpft. Die Verläufe der höherharmonischen maximalen Amplituden aller Strömungsgrößen sind im Anhang A zu finden.

Aufgrund der bei unterschiedlichen Amplituden qualitativ ähnlichen Ergebnisse wird im folgenden nur eine Amplitude von $\Delta\sigma = 0.5^\circ$ betrachtet.

4.1.1.2 Charakteristiken

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Störungen abschätzen zu können, wird die Dichtestörung, d.h. die Differenz aus der aktuellen Dichte und der Dichte der Grundströmung, in einem $x - t$ -Diagramm bei konstantem Wandabstand dargestellt. Um daraus die Ausbreitungsgeschwindigkeiten zu ermitteln, müssen die normierten Werte in dimensionsbehafteten Größen transformiert werden. Betrachtet werden die Charakteristiken sowohl innerhalb der Grenzschicht ($y = 0.28 \cdot \delta_{sa}$) als auch außerhalb ($y = 1.4 \cdot \delta_{sa}$), wobei sich die Grenzschichtdicke am Auftreffpunkt des Stoßes zu $\delta_{sa} = 0.179$ ergibt.

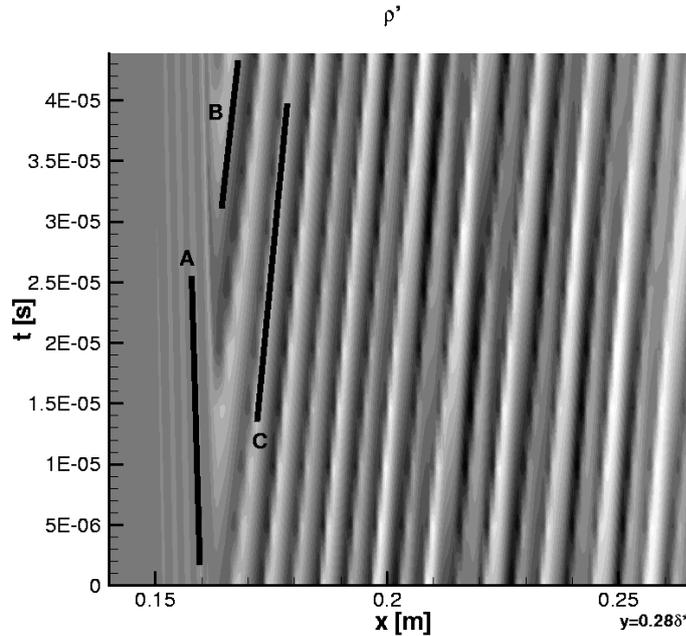


Abbildung 4.8: $x-t$ Diagramm im Wandabstand von $0.28 \cdot \delta_{sa}$

Aus dem $x - t$ -Diagramm 4.8 lassen sich für die Störungen innerhalb der Grenzschicht drei Geschwindigkeiten (**A**, **B**, **C**) identifizieren. Die Störung **A** verläuft stromauf, die beiden Störungen **B** und **C** laufen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten stromab. Hierbei wurden grafisch folgende Werte für die Störgeschwindigkeiten ermittelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : c &\approx -50 \frac{m}{s} \\ \mathbf{B} : c &\approx 440 \frac{m}{s} \\ \mathbf{C} : c &\approx 260 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Der gemittelte Betrag der Strömungsgeschwindigkeiten beträgt ca. $140 \frac{m}{s}$, die Schallgeschwindigkeit weist einen Wert von ca. $330 \frac{m}{s}$ auf. Die theoretische Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen betragen somit:

$$\begin{aligned} v_{st} &= U \pm a & (4.1) \\ &= 140 \frac{m}{s} \pm 330 \frac{m}{s} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 470 \frac{m}{s} & C_+ : U + a \\ -190 \frac{m}{s} & C_- : U - a \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Ablesegenauigkeiten entsprechen die Charakteristiken **A** der Geschwindigkeit $U - a$ und **B** der Geschwindigkeit $U + a$. Die Charakteristik **C** entspricht ungefähr der Schallgeschwindigkeit. Auch Krause [11] konnte diese drei Ausbreitungsgeschwindigkeiten identifizieren. Allgemein ist festzustellen, daß diese Methode aufgrund der geringen Ablesegenauigkeit im Prinzip nur eine qualitative Aussage zuläßt.

Abbildung 4.9 zeigt das $x - t$ -Diagramm außerhalb der Grenzschicht in einem Wandabstand von $1.4 \cdot \delta_{sa}$. Hier ließen sich zwei Störgeschwindigkeiten **D** und **E** identifizieren, von denen eine stromauf verläuft. Anhand der dortigen gemittelten Strömungsgrößen ergeben sich für den Betrag der Strömungsgeschwindigkeit ein Wert von ca. $700 \frac{m}{s}$ und für die Schallgeschwindigkeit ein Wert von ca. $160 \frac{m}{s}$.

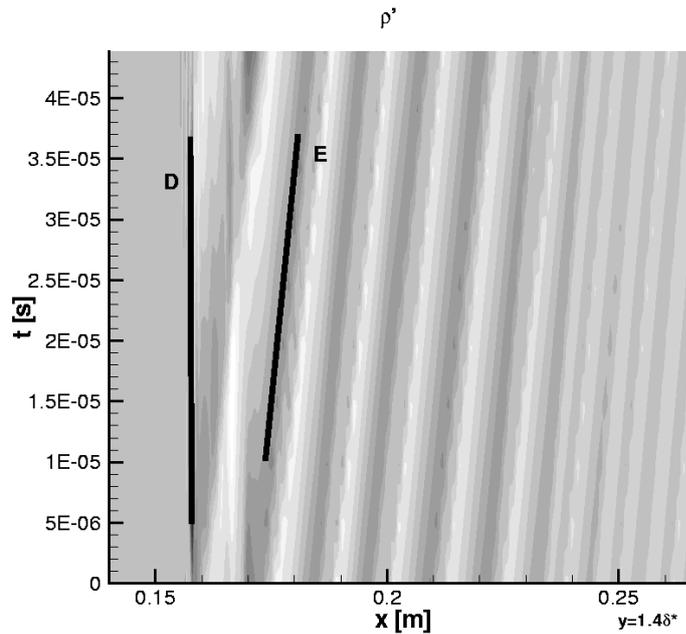


Abbildung 4.9: $x-t$ Diagramm im Wandabstand von $1.4 \cdot \delta_{sa}$

Aus der Abbildung 4.9 ergibt die graphische Auswertung folgende Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : c &\approx -20 \frac{m}{s} \\ \mathbf{E} : c &\approx 290 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (4.1) ergeben sich die charakteristischen Geschwindigkeiten zu:

$$v_{st} = \left\{ \begin{array}{ll} 860 \frac{m}{s} & C_+ : U + a \\ 540 \frac{m}{s} & C_+ : U - a \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Die großen Differenzen zu den theoretischen Werten bedeuten, daß sich die Störungen außerhalb der Grenzschicht nicht mit den charakteristischen Geschwindigkeiten ausbreiten. Im Hinblick auf die Ablesegenauigkeit kann man davon ausgehen, daß die Störgeschwindigkeit **D** auch zu null werden kann. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit **E** entspräche bei einer entsprechenden Fehlertoleranz am ehesten der Schallgeschwindigkeit.

4.1.2 Instabilitätswellen

Zweidimensionale Instabilitätswellen sind unter Anderem für den laminar-turbulenten Umschlag in der Grenzschicht verantwortlich. Allerdings lassen sich diese nicht ohne weiteres identifizieren, da sie im vorliegenden Fall eine deutlich kleinere Amplitude aufweisen und somit gegenüber den Schallwellen untergehen. Tollmien-Schlichting-Wellen sind zweidimensionale Instabilitätswellen, die sich mit Unterschallgeschwindigkeit ausbreiten. Dies bedeutet, daß nach Abschalten der Störانregung die Schallwellen zuerst nach rechts aus dem Integrationsgebiet laufen und die Unterschall-Störungen für eine gewisse Zeitspanne, wenn die Schallwellen aus dem Integrationsgebiet ausgetreten sind, erkennbar werden. Zur weiteren Untersuchung bietet sich die 14. Periode nach dem Abschalten der Störung an, da dann einerseits die Schallwellen den rechten Rand passiert haben, andererseits die Unterschallstörungen noch einen genügend großen Bereich der Lauflänge einnehmen. Das Strömungsbild ist anhand der Dichtestörung in Abbildung 4.11 dargestellt. Für die weiteren Betrachtungen wird als Wandabstand ein Wert von $y = 0.1$ gewählt, dies entspricht etwas mehr als der Hälfte der Grenzschichtdicke δ_{sa} am Stoßauftrittspunkt.

4.1.2.1 Charakteristiken

Zuerst sollen die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Störwellen untersucht werden. Diese werden hierbei wie bereits in Abschnitt 4.1.1.2 anhand eines $x - t$ -Diagrammes grafisch ermittelt. Abbildung 4.10 zeigt den zeitlichen Verlauf der Dichtestörungen innerhalb der Grenzschicht ($y = 0.1$) bei einem konstanten Wandabstand während der 14. Periode nach dem Abschalten der Störانregung.

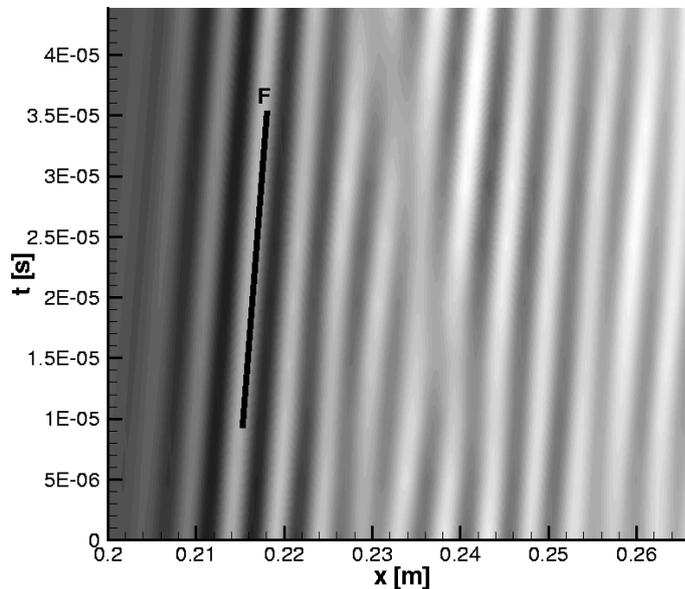


Abbildung 4.10: $x-t$ Diagramm im Wandabstand von $y = 0.1$ während der 14. Periode nach dem Abschalten der Störانregung

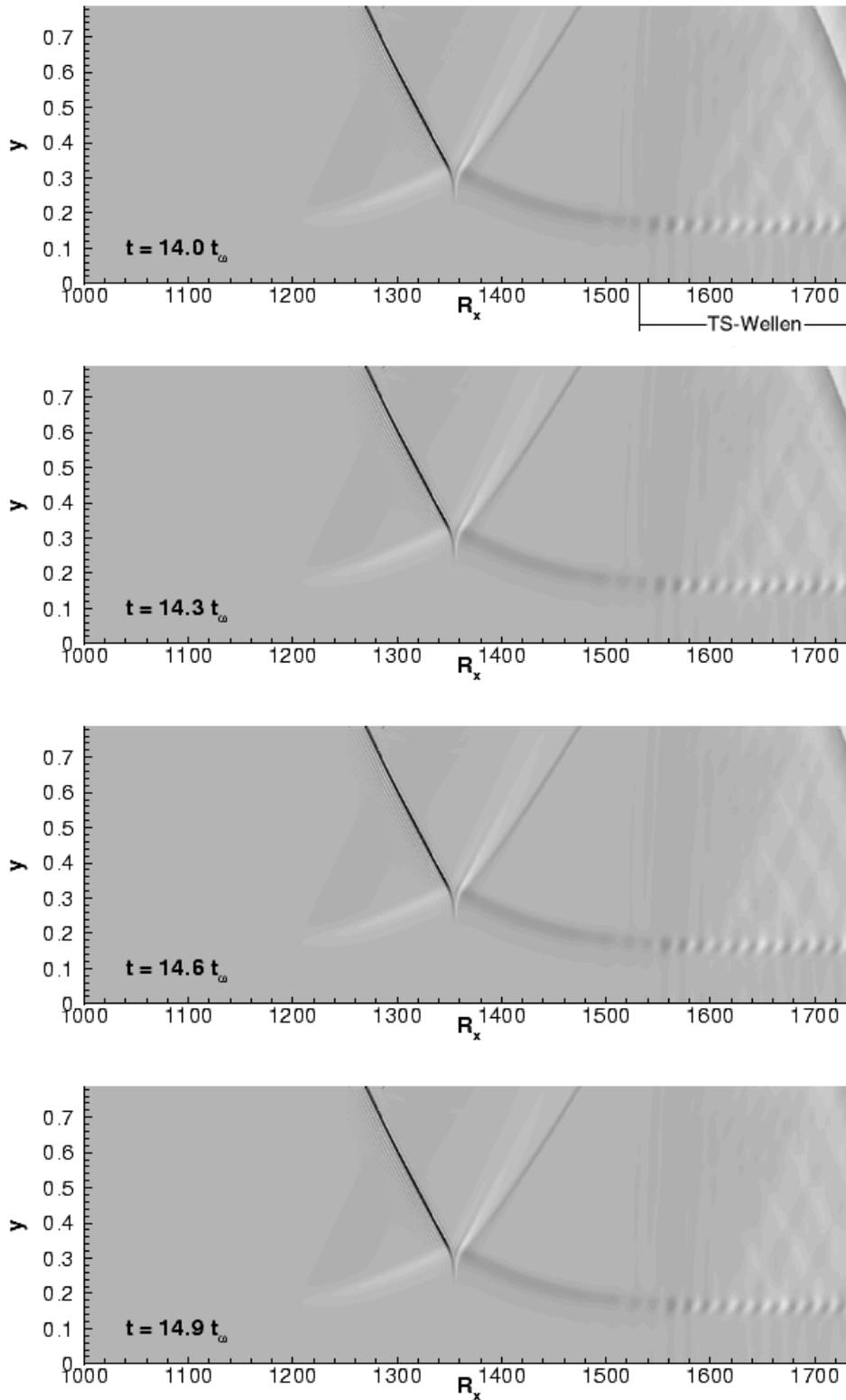


Abbildung 4.11: Momentanbilder der Dichtestörung während der 14. Periode nach dem Abschalten der Störanregung

Im Rahmen der Ablesegenauigkeit ist eine Ausbreitungsgeschwindigkeit \mathbf{F} erkennbar, die einen Wert von ungefähr $110 \frac{m}{s}$ aufweist. Die räumlich und zeitlich gemittelte Schallgeschwindigkeit beträgt ca. $300 \frac{m}{s}$, d.h. die Störungen breiten sich mit näherungsweise $\frac{1}{3}$ der Schallgeschwindigkeit, also Unterschall aus. Damit ist eine notwendige Bedingung erfüllt, daß es sich um Tollmien-Schlichting-Wellen handeln könnte.

4.1.2.2 Fourieranalyse

Abbildung 4.12 zeigt beispielhaft die momentane Dichtestörung innerhalb der Grenzschicht während der 14. Periode nach dem Abschalten. Deutlich erkennbar ist, daß die Störungen in erster Näherung einen mit der Frequenz der Störanregung periodischen Verlauf aufweisen, insbesondere im Bereich der großen Amplituden. Somit ist für eine weitere Analyse eine Fouriertransformation über eine volle Störperiode von $\frac{2\pi}{\omega_0}$ sinnvoll, wie bereits bei den Abbildungen 4.5 bis 4.7.

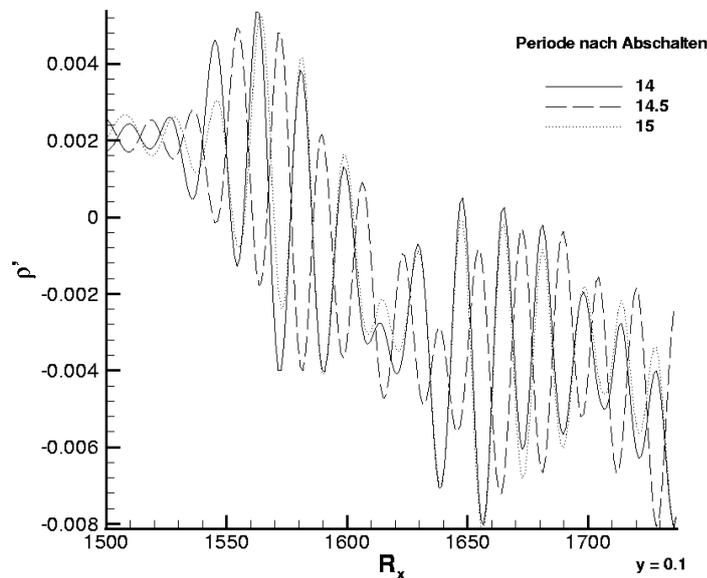


Abbildung 4.12: Dichtestörungen im Wandabstand $y = 0.1$ während der 14. Periode nach Abschalten der Störanregung

Abbildung 4.13 zeigt die Amplituden der ersten und zweiten harmonischen Frequenz. Im großen und ganzen dominieren die Störungen mit der Grundfrequenz, allerdings zeigt sich in einem Bereich $1600 \leq R_x \leq 1650$, insbesondere bei Temperatur, Dichte und Druck, daß die erste Höherharmonische eine ebenso große Bedeutung hat. Weitere höherharmonische Anteile sind von verschwindender Größenordnung und sind deshalb der Übersicht halber nicht dargestellt. Deutlich erkennbar sind vor allem bei der Grundfrequenz Schwebungsknoten bei allen Strömungsgrößen, aber auch die Amplituden der zweiten harmonischen Frequenz weisen in manchen Bereichen Knoten auf. Deren Abstände weisen deutliche Unterschiede auf. Insbesondere fällt der Amplitudenverlauf der Dichte auf, hier sind die kürzeren Abstände der Schwebungsknoten, wie man sie in den anderen Strömungsgrößen sieht, kaum mehr erkennbar.

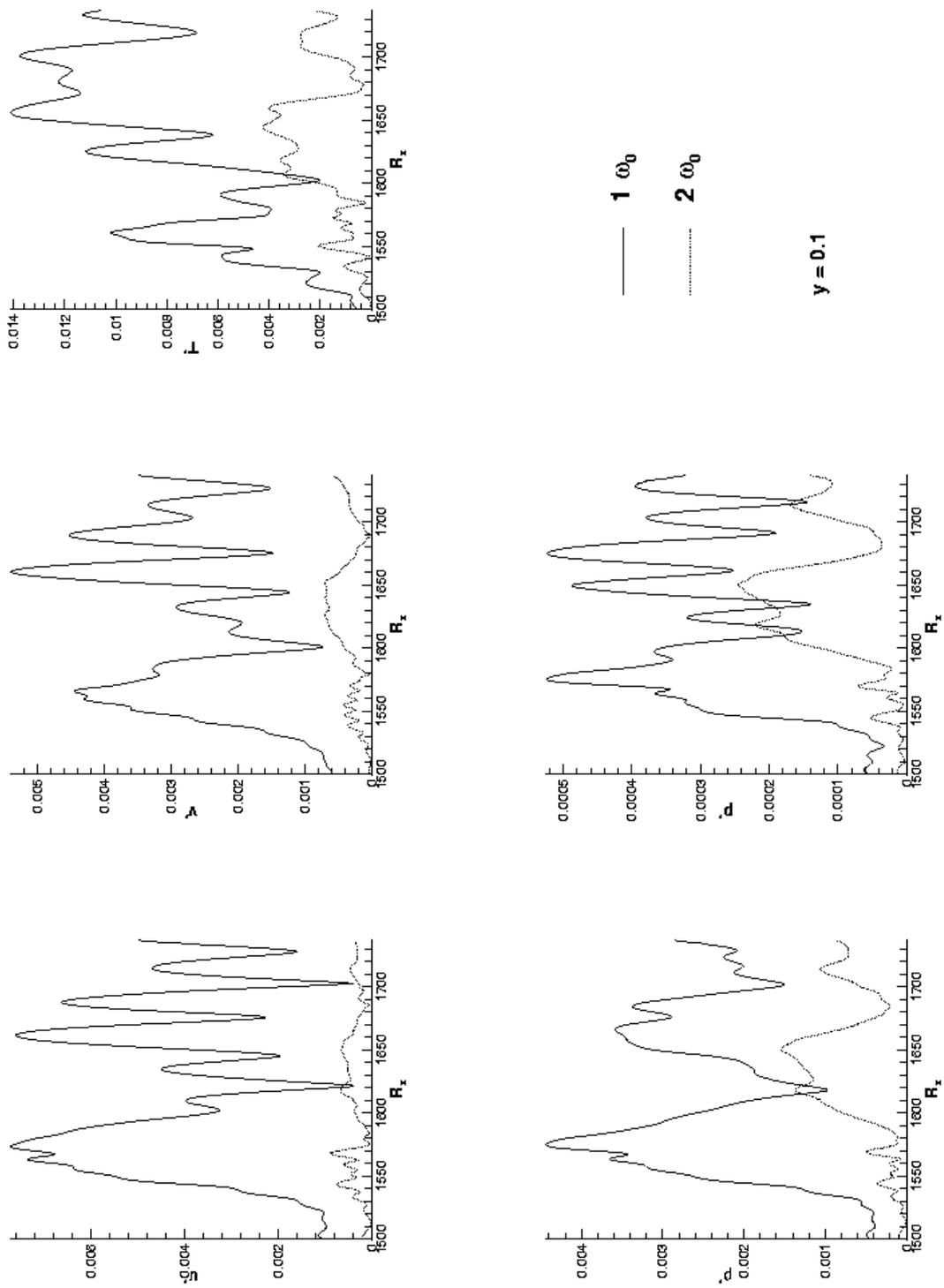


Abbildung 4.13: Amplitudenverteilung der ersten und zweiten harmonischen Frequenzen im Wandabstand $y = 0.1$

Bei der Amplitude der zweiten harmonischen Frequenz sind nur in einem Bereich bis $R_x \approx 1580$ Schwebungsknoten identifizierbar, weiter links ($R_x \approx 1500$) sind sämtliche Störungen bereits aus dem Integrationsgebiet herausgelaufen. Die Knotenabstände unterscheiden sich im Vergleich der einzelnen Strömungsgrößen nicht deutlich, sind im Vergleich zur ersten Harmonischen allerdings deutlich kleiner. Weiter rechts, dort wo die erste höherharmonische Frequenz die selbe Größenordnung wie die erste aufweist, scheint eine weitere Aufschlüsselung kaum möglich, da sich das Signal aus einer ganze Bandbreite überlagerter Wellen verschiedener Frequenzen und Wellenlängen zusammensetzt. Eine mögliche Erklärung hierfür ist das Abschalten der Störanregung. Diese erfolgt zwar zum Ende einer vollen Periode, d.h. der zeitliche Verlauf des Stoßwinkels ist stetig, allerdings ergibt sich durch das plötzliche Abschalten ein Knick, wie in Abbildung 4.14 zu sehen ist. An dieser Stelle ist der zeitliche Verlauf des Stoßwinkels nicht differenzierbar. Solche Unstetigkeiten in der Ableitung regen in der Regel eine Vielzahl unterschiedlichster Frequenzen an.

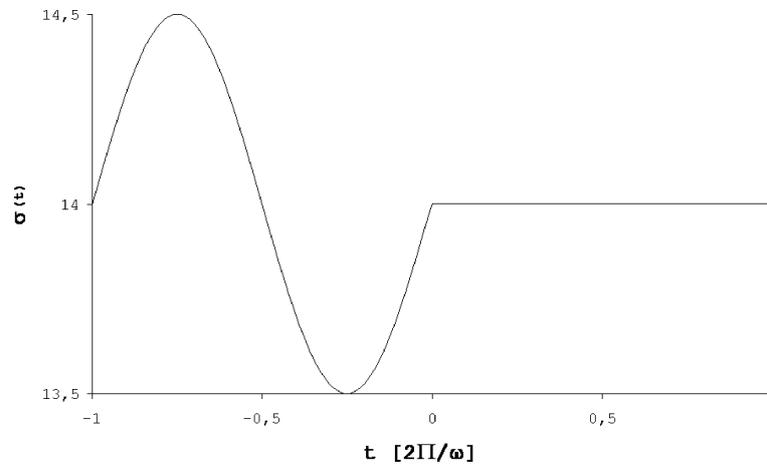


Abbildung 4.14: Zeitlicher Verlauf des Stoßwinkels beim Abschalten der Störanregung zum Zeitpunkt $t=0$

Um Wellenzahlen zu identifizieren, wird nun im Gegensatz zur bisherigen *zeitlichen* Fouriertransformation eine *räumliche* Fouriertransformation über der x -Koordinate durchgeführt, indem als Intervall nicht das einer zeitlichen Periode, sondern die Länge zwischen zwei Schwebungsknoten verwendet wird. Dies liefert die Amplituden in Abhängigkeit der Wellenzahl, anstatt der Frequenz, wodurch eine Aussage über die angeregten Wellenzahlen möglich ist. Die Fouriertransformation wird mit einem sogenannten Hanningfenster durchgeführt, wodurch die Ränder des Intervalls geglättet werden. Dies geschieht durch eine Gewichtung der Ausgangsdaten mittels eines trigonometrischen Ansatzes (siehe Numerical Recipies [17]).

Beispielhaft soll hier nun die räumliche Fouriertransformation der Dichtestörungen betrachtet werden, wie sie in Abbildung 4.15 für drei verschiedene Zeitpunkte dargestellt ist. Zugrunde liegt das Intervall $1529 \leq R_x \leq 1701$, das entsprechend den Schwebungsknoten gewählt wurde. Die Wellenzahl k_{well} berechnet sich aus dem Abstand der Schwebungsknoten l_{SK} und der Ordnungsnummer i_{fou} aus der Fourieranalyse gemäß:

$$k_{well} = i_{fou} \cdot \frac{2\pi}{l_{SK}} \quad (4.3)$$

Da sich die Wellenzahlen nur durch ganzzahlige Vielfache des betrachteten Intervalls ergeben, ist die Auflösung natürlich beschränkt. Neben den hohen Amplituden bei der ersten Wellenzahl, die sich ja aufgrund des Abstandes der Schwebungsknoten ergeben, zeigen sich zwei deutliche Ausschläge. Die erste Amplitudenspitze bei einer Wellenzahl von ca. 9 variiert mit der Zeit, der Ausschlag zur vollen Periode ist ungefähr konstant, zwischen den beiden gezeigten Perioden reduziert sich dieser Wert. Der zweite Peak liegt bei einer Wellenzahl von ungefähr 11.5 und ist relativ unabhängig von der Zeit. Die räumliche Fourieranalyse aller Strömungsgrößen sind in Anhang B zu finden.

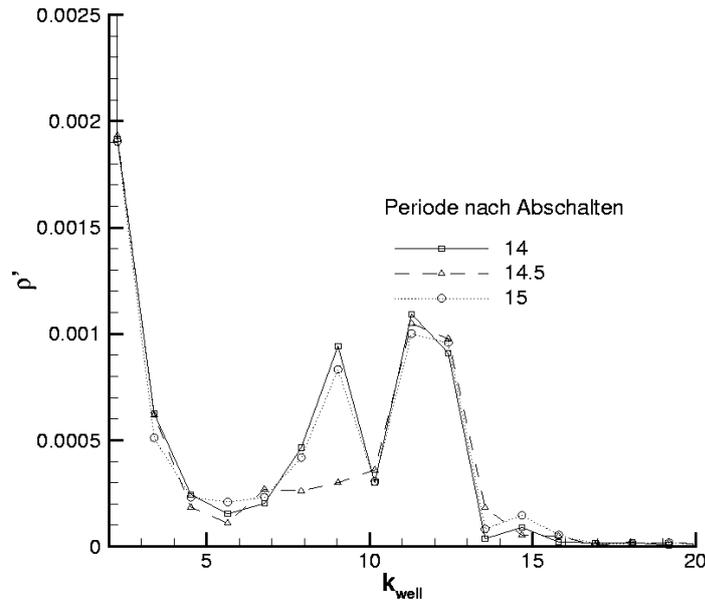


Abbildung 4.15: Räumliche Fouriertransformation der Dichtestörungen mit Hanningfenster im Wandabstand $y = 0.1$

4.1.2.3 Vergleich mit der linearen Stabilitätstheorie

Um die Wellenzahlen zu interpretieren, ist es sinnvoll, die über dem x -Intervall gemittelten Ergebnissen der Stabilitätstheorie zu betrachten. Die lineare Stabilitätstheorie, siehe Mack [13], liefert als angefachte Wellenzahl einen gemittelten Wert von ca. 11.3, als gedämpfte Wellenzahl einen gemittelten Wert von ca. 9. Das heißt, dass die Wellenzahlen der Dichtestörungen in der DNS recht genau der linearen Stabilitätstheorie entsprechen.

Die Störungen, des Druckes (Abbildung B.3) und der beiden Geschwindigkeitskomponenten (Abbildungen B.4 und B.5) weisen auch Amplitudenspitzen bei der angefachten Wellenzahl auf. Die gedämpfte Wellenzahl tritt beim Druck im Gegensatz zur Dichte bei der halben Periode auf, d.h. die gedämpfte Wellenzahl verläuft gegenphasig zu derjenigen der Dichte. Bei der Temperatur (Abbildung B.1) sieht man nur eine leichte Amplitudenspitze im Bereich der gedämpften Wellenzahl. Die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung zeigt eine zusätzlich angeregte Wellenzahl von ca. 4.5, was der doppelten Wellenlänge der gedämpften Wellenzahl entspricht.

Die recht gute Übereinstimmung der Ergebnisse aus Abschnitt 4.1.2.2 mit denen der Stabilitätstheorie legt es nahe, die Ergebnisse der numerischen Simulation weitgehend mit der linearen Theorie zu vergleichen. Hierzu vergleichen wir die Amplitudenverteilungen mit den Eigenfunktionen aus der linearen Stabilitätstheorie. Da das hierfür verwendete Computerprogramm an einzelnen diskreten Punkten in Laufrichtung die Amplituden und Phasen berechnet, erfolgt der Vergleich mit den Daten der numerischen Simulation an den Stellen $R_x = 1550, 1575$ und 1600 .

Da bei der linearen Theorie die Amplitude der Störungsanregung keinen Einfluß auf den qualitativen Verlauf hat und somit nur die relativen Unterschiede in den Amplituden der einzelnen Strömungsgrößen von Bedeutung sind, werden die Amplituden der Strömungsgrößen so skaliert, daß die maximale Amplitude der Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung übereinstimmt. Aufgrund eines Unterschieds in der Normierung der Druckamplitude wird deren Maximum auf das jeweilige Druckmaximum normiert. Die y -Koordinate wird mit der Wurzel der Reynoldszahl R_x gemäß Gleichung (3.31) normiert, so daß die Grenzschichtdicke δ_{99} der Strömung ohne Stoß über der Lauflänge x einen konstanten η -Wert aufweist.

Abbildung 4.16 zeigt vergleichend den Amplitudenverlauf der ersten harmonischen Frequenz an der Stelle $R_x = 1575$. Der Verlauf der Ergebnisse aus der numerischen Simulation wird durch die lineare Stabilitätstheorie qualitativ recht gut wiedergegeben. So stimmen die Positionen der Extremwerte und Nulldurchgänge in erster Näherung überein. Die maximalen Amplituden der Geschwindigkeitskomponenten sind wandnah, die des Druckes direkt an der Wand. Bei Temperatur und Dichte liegen die Maxima mit $\eta \approx 10$ etwas weiter von der Wand entfernt, wobei die Temperatur in Wandnähe einen weiteren Amplitudenausschlag zeigt. Es fällt auf, daß eine besonders gute Übereinstimmung im wandnahen Bereich vorhanden ist. Die größten Unterschiede treten weiter außen auf, wobei mit Ausnahme der Dichte bei allen anderen Strömungsgrößen die Ergebnisse der linearen Theorie zu hoch ausfallen.

In Abbildung 4.17 sind die Phasenverläufe der einzelnen Strömungsgrößen an der Stelle $R_x = 1575$ dargestellt. Bei den Geschwindigkeitskomponenten kann man erkennen, daß die Phasensprünge bei linearer Theorie und numerischer Simulation an derselben Stelle liegen und daß nach dem Phasensprung die Differenz im Bogenmaß recht genau 2π beträgt. Wegen der Periodizität ist eine Verschiebung der Phase um 2π möglich. Der unterschiedlich herum verlaufende Phasenwechsel ist auf die Numerik des Lösers der linearen Stabilitätstheorie zurückzuführen. Die Phasenverläufe von Temperatur und Dichte unterscheiden sich zwar deutlich, allerdings ist eine Korrelation deutlich erkennbar. Bei der Phase der Druckstörung sind sich beide Kurven nur im wandnahen Bereich ähnlich, das Extremum bei $\eta = 12.5$ findet sich in der linearen Stabilitätstheorie nicht.

Weitere Diagramme der Amplituden und Phasenverläufe an den Stellen $R_x = 1550$ und $R_x = 1600$ sind in Anhang C zu finden. Dort zeigt sich bei Amplitude und Phase an der Stelle $R_x = 1600$ eine deutlich größere Diskrepanz. Dies ist auch zu erwarten, da dieses Gebiet bereits in Abschnitt 4.1.2.2 als der Bereich identifiziert wurde, in dem nicht nur die erste harmonische Frequenz dominiert. An der Stelle $R_x = 1550$ fällt vor allem bei der Dichte der Phasenunterschied von ungefähr π zwischen der linearen Theorie und der Simulation auf. Auch weichen die meisten Amplituden- und Phasenverläufe stärker von den Werten der Simulation ab, als dies an der Stelle $R_x = 1575$ der Fall ist.

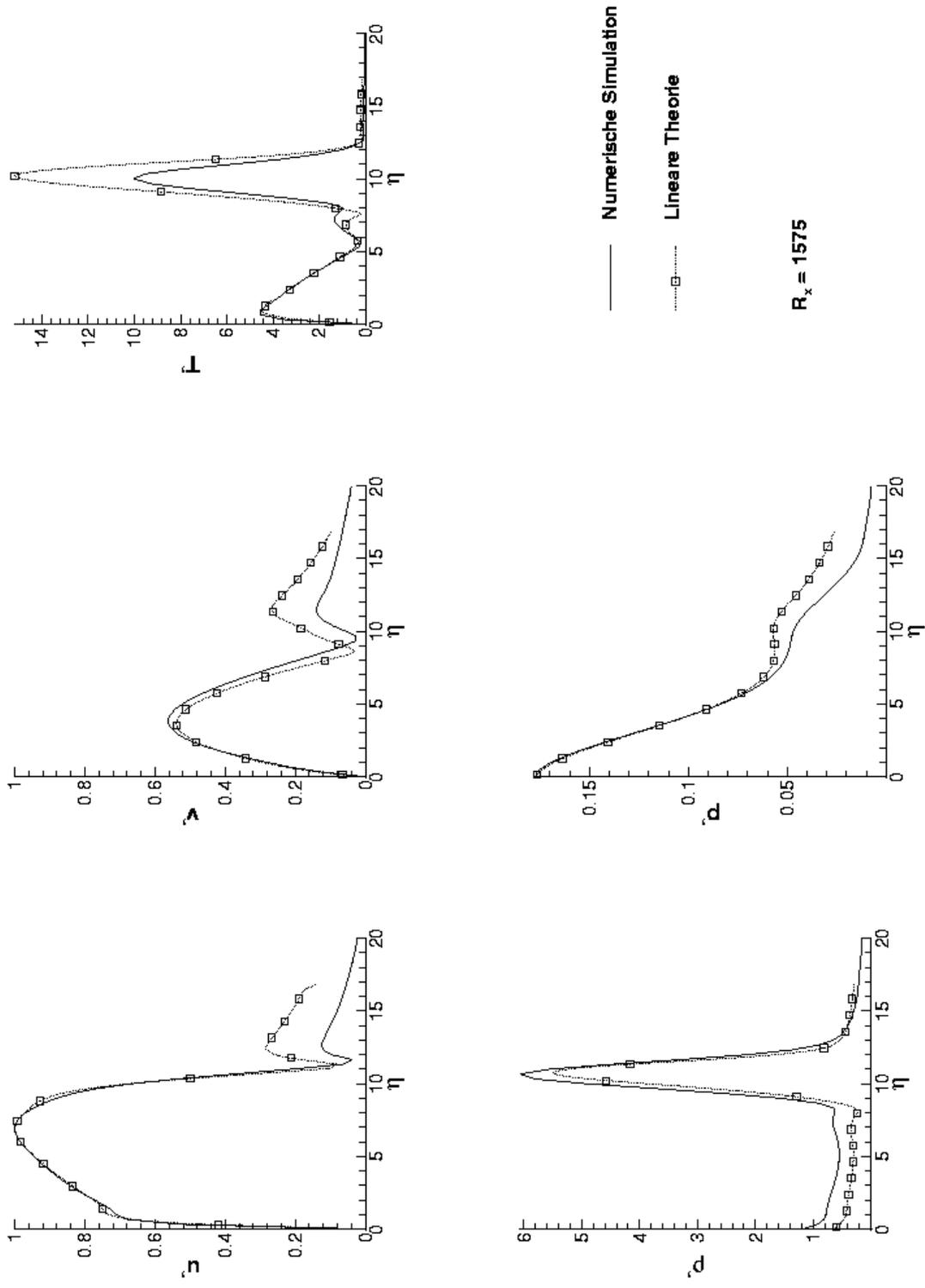


Abbildung 4.16: Vergleich der Amplitudenverteilung in wandnormaler Richtung der DNS mit den Eigenfunktionen der kompressiblen, linearen Stabilitätstheorie an der Stelle $R_x = 1575$

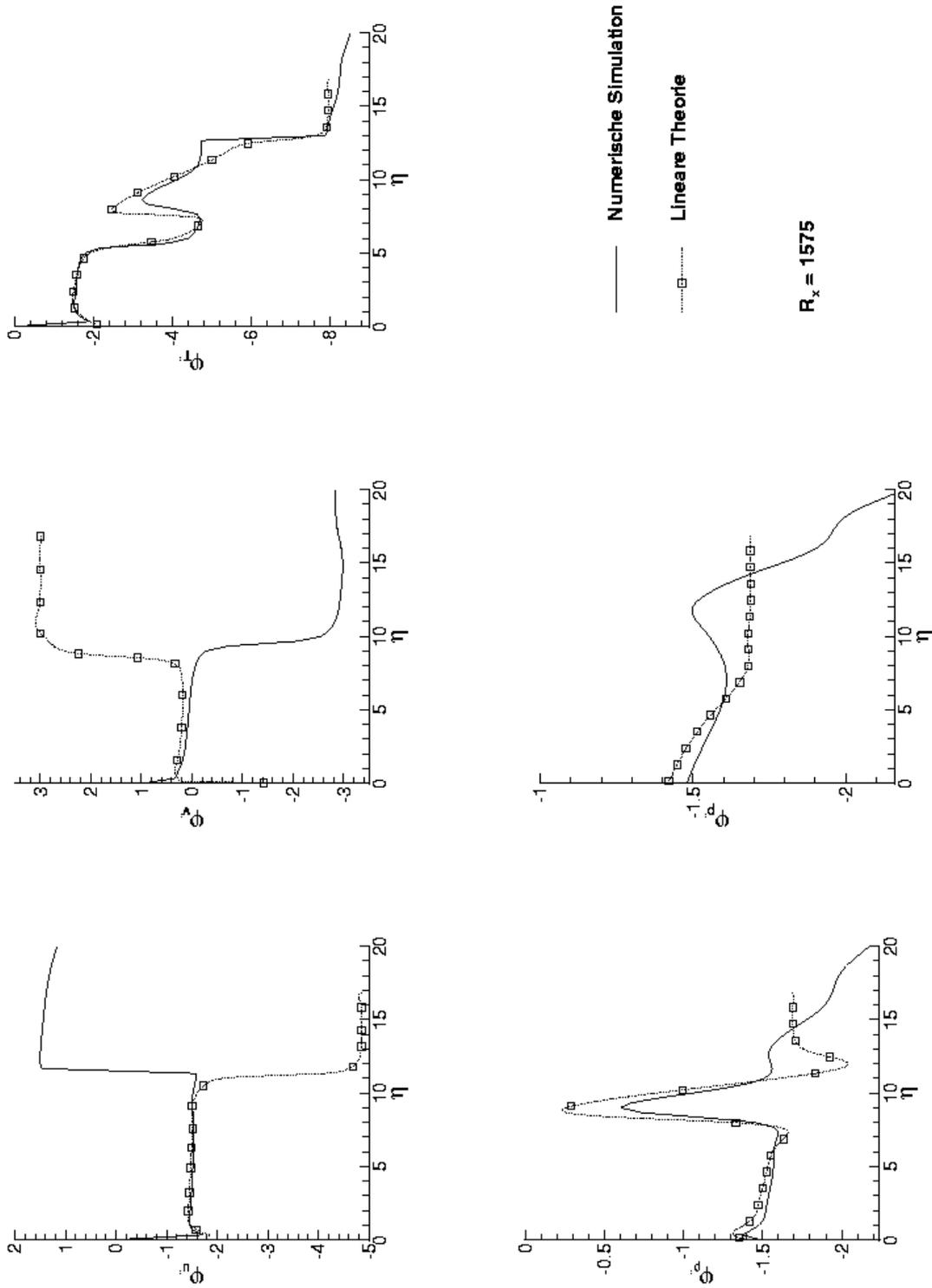


Abbildung 4.17: Phasenvergleich [rad] der DNS mit der kompressiblen, linearen Stabilitätstheorie an der Stelle $R_x = 1575$

4.2 Gittertransformation

Das bisherige Verfahren ermöglicht aufgrund des äquidistanten Gitters nur die Strömungsberechnung über einer ebenen Platte. Mit der Erweiterung des Programms auf beliebige Gittergeometrie werden nun Rechnungen mit komplexeren Geometrien wie z.B. einer Kompressionsrampe (Abschnitt 4.2.5) möglich. Die Erweiterung des numerischen Verfahrens basiert auf der in Anderson [3] vorgestellten Vorgehensweise.

4.2.1 Transformierte Gleichungen

Die Berechnung mittels finiter Differenzen erfolgt stets an diskreten Punkten. Wenn jedoch Strömungen über beliebige Geometrien berechnet werden sollen, ist dies mit einem äquidistanten Gitter (siehe Abbildung 3.1) nicht mehr möglich. Aus diesem Grund wird das physikalische $x - y$ -Gitter in ein äquidistantes $\xi - \eta$ -Rechengitter transformiert:

$$x = x(\xi, \eta) \quad (4.4)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (4.5)$$

Dies ist beispielhaft anhand des Gitters um ein Tragflächenprofil in Abbildung 4.18 dargestellt. Die Ableitungen nach x - und y müssen ebenfalls in Ableitungen nach ξ und η transformiert werden. Mit der Determinante der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4.6)$$

lauten gemäß Anderson [3] die ersten Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.8)$$

Daraus folgt, daß die Erhaltungsgleichungen (2.8) ebenfalls transformiert werden müssen. Aus den Flußvektoren in Gl. (2.9) und (2.10) ergeben die transformierten Flußvektoren:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \mathbf{G} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{G}_T = -\mathbf{F} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \mathbf{G} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.10)$$

und mit dem transformierten Vektor der konservativen Variablen

$$\mathbf{Q}_T = J \cdot \mathbf{Q} \quad (4.11)$$

lauten die transformierten Erhaltungsgleichungen im Rechenraum in vektorieller Schreibweise:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_T}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}_T}{\partial \eta} = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

Die Diskretisierung in ξ - und η -Richtung sowie die Zeitintegration entsprechen der Vorgehensweise, wie sie in den Abschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 beschrieben ist, wobei natürlich Δx und Δy durch $\Delta \xi$ bzw. $\Delta \eta$ ersetzt werden.

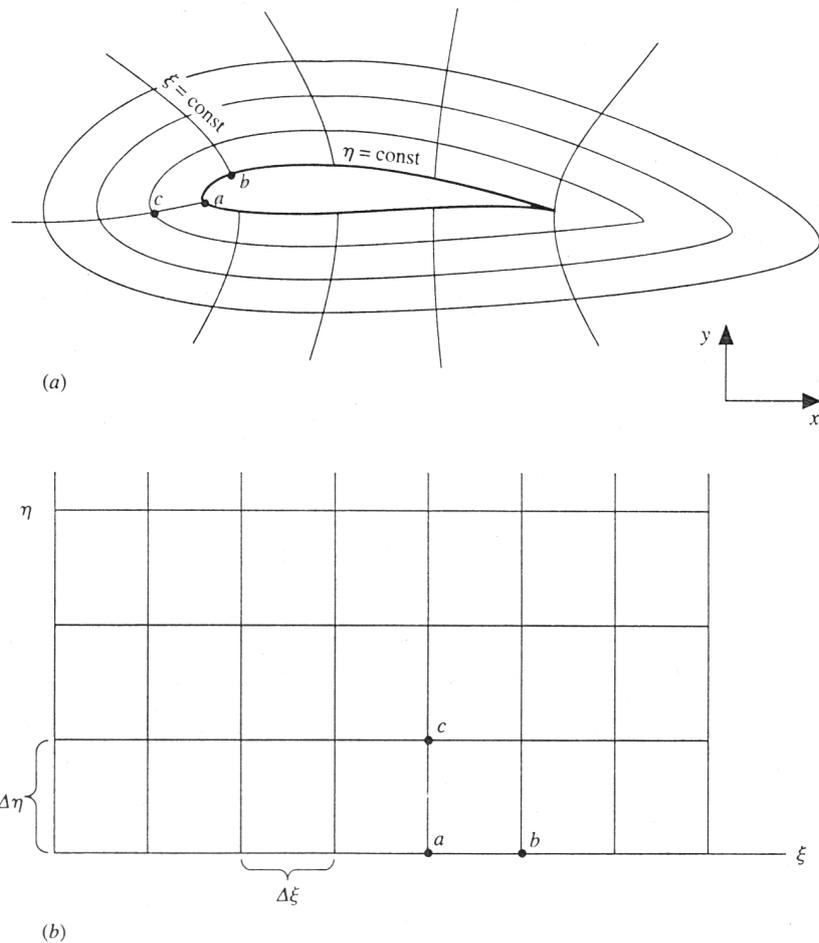


Abbildung 4.18: Physikalisches Gitter und Rechengitter (Anderson [3])

4.2.2 Randbedingungen

4.2.2.1 Oberer Rand

Für den oberen Rand wurde eine im Vergleich zu der bisherigen Vorgehensweise (Abschnitt 3.6.1) einfachere Randbedingung implementiert. Es wird dabei davon ausgegangen, daß sich die Strömungsgrößen hinreichend weit entfernt von der Wand in η -Richtung nur sehr gering ändern:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta y} (\phi_{M-2} - 4\phi_{M-1} + 3\phi_M) = 0 \quad (4.13)$$

Dies ergibt schließlich:

$$\phi_M = \frac{1}{3} (4\phi_{M-1} - \phi_{M-2}) \quad (4.14)$$

4.2.2.2 Einström- und Ausströmrand

Am Einströmrand werden, wie bereits in Abschnitt 3.6.2 beschrieben, die Strömungsgrößen durch quadratische Interpolation von der Ähnlichkeitskoordinate η auf den Wandabstand

y an diskreten Stellen berechnet. Da nur über y interpoliert wird, ist bei der Gittergenerierung jedoch darauf zu achten, daß der Einströmrand senkrecht auf der Wand steht. Wäre dies nicht der Fall, entspräche auch die vorgegebene Grenzschichtlösung im Fall des gestreckten Gitters nicht mehr physikalisch sinnvollen Vorgaben.

Am Ausströmrand werden analog zu Abschnitt 3.6.2 die zweiten Ableitungen in ξ -Richtung vernachlässigt.

4.2.2.3 Wand

Für die Geschwindigkeitskomponenten gilt wie bisher die Haftbedingung aus Gleichung (3.32). Auch die Wandtemperatur wird wie bisher vorgegeben. Die bisherige Art der Wanddruckberechnung (siehe Abschnitt 3.6.3) ist zwar auch bei einem transformierten Gitter anwendbar, allerdings nur unter der Voraussetzung, daß an der Wand und der Differenz aus Gleichung (3.15) entsprechend viele Punkte davon entfernt, die Richtungen $\xi = const.$ und $\eta = const.$ senkrecht aufeinander stehen.

Um die Berechnung des Wanddruckes möglichst allgemein zu halten, wurde die bisherige Vorgehensweise modifiziert. Es wird immer noch die v -Impulsgleichung zu Grunde gelegt. Setzt man die dritten Komponenten der Flußvektoren aus den Gleichungen (2.9) und (2.10) sowie des Vektors der Konservativen Variablen (2.6) in die transformierte Erhaltungsgleichung (4.12) ein, so sieht man, daß nun nicht nur Ableitungen des Druckes in η -Richtung sondern auch Ableitungen des Druckes in ξ -Richtung auftreten:

$$J \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho v \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial y}{\partial \eta} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial x}{\partial \eta} (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ -\frac{\partial y}{\partial \xi} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial x}{\partial \xi} (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \right\} = 0 \quad (4.15)$$

Die Ableitung in η -Richtung wird analog zu Gleichung (3.15) gebildet. In ξ -Richtung erfolgt die Diskretisierung durch eine zentrale Differenz zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi} = \frac{p_{n+1} - p_{n-1}}{2 \cdot \Delta \xi} \quad (4.16)$$

Da am linken Rand der Druck durch den Einströmrand vorgegeben wird, ist als einziger Sonderfall der rechte Rand gesondert zu betrachten. Hier kommt eine rückwärtsgerichtete Differenz zum Einsatz:

$$\frac{\partial p_N}{\partial \xi} = \frac{p_N - p_{N-1}}{\Delta \xi} \quad (4.17)$$

Die daraus resultierende Gleichung beinhaltet an unbekanntem Größen die Werte des Wanddruckes an der betrachteten Stelle, einen Punkt davor und mit Ausnahme des rechten Randes einen Punkt danach. Somit hat die resultierende Gleichung die Form $a \cdot p_{n-1} + b \cdot p_n + c \cdot p_{n+1} = d$, wodurch sich ein tridiagonales Gleichungssystem ergibt, für dessen Lösung eine bereits vorhandene Routine (siehe Abschnitt 3.1) verwendet wird.

Aus der Temperatur und dem so berechneten Druck wird die Waddichte aus der Gasgleichung (3.36) berechnet.

4.2.3 Gittergenerierung

Die Erzeugung des physikalischen Gitters ist die Definition der Gleichungen (4.4) und (4.5) und stellt somit ein von der Lösung der Strömungsgleichungen separates Problem dar.

Wünschenswert sind stets, soweit möglich analytische Funktionen für die Gleichungen (4.4) und (4.5), da dann die Elemente der Jacobi-Determinante (4.6) analytisch und nicht durch Differenzenquotienten bestimmt werden müssen, welche die Genauigkeit reduzieren.

Im Rahmen dieser Arbeit kommen unterschiedliche Gitter zur Anwendung. Die in den Abschnitten 4.2.3.1 und 4.2.3.2 beschriebenen Gitter dienen der Validierung des Verfahrens, da die resultierenden Gitter ebenfalls das Gebiet über einer ebenen Platte beschreiben. In Abschnitt 4.2.3.3 wird die Generierung einer Kompressionsrampe beschrieben.

4.2.3.1 Holst-Transformation

Die Holst-Transformation (siehe Anderson [3]), erzeugt eine Stauchung der Gitterpunkte in x -Richtung am Punkt ξ_0 und ist folgendermaßen definiert:

$$x = x' + \frac{\xi_0}{A} \{ \sin [(\xi - x_0) \cdot \beta_x] + A \} \quad (4.18)$$

mit:

$$A = \sinh(\beta_x x_0) \quad (4.19)$$

$$x_0 = \frac{1}{2\beta_x} \ln \frac{1 + (e^{\beta_x} - 1) \xi_0}{1 + (e^{-\beta_x} - 1) \xi_0} \quad (4.20)$$

wobei β_x den Grad der Stauchung und x' den Beginn des Integrationsgebietes beschreibt. In y -Richtung wird ein äquidistantes Gitter verwendet. Ein solches Gitter ist beispielhaft in Abbildung 4.19 dargestellt. Um Probleme mit dem Definitionsbereich des Logarith-

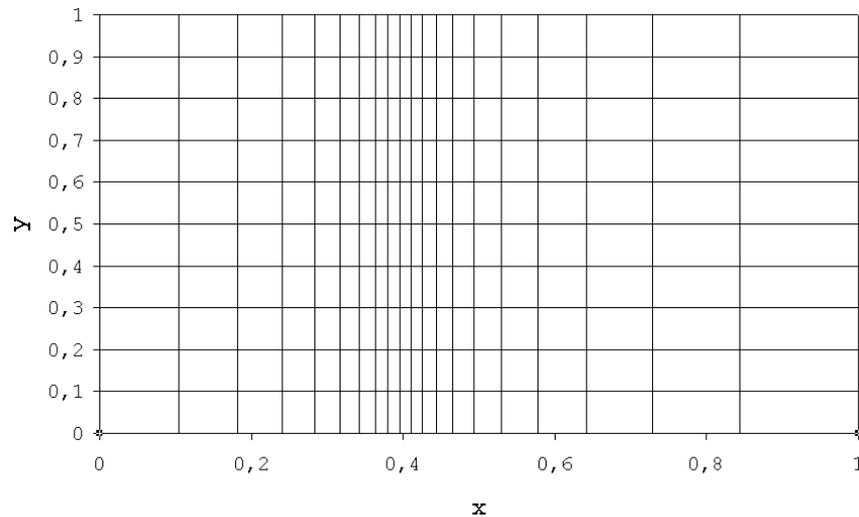


Abbildung 4.19: Holst-Transformation mit $\beta_x = 6$, $\xi_0 = 0.4$ und $0 \leq \xi \leq 1$

mus in Gleichung (4.20) zu vermeiden, kann es sinnvoll sein, das Rechengitter auf das Intervall $0 \leq \xi \leq 1$ zu normieren und die Länge des physikalischen Gitters durch eine Längenskalierung zu erzeugen, was allerdings bisher noch nicht durchgeführt wurde.

4.2.3.2 Logarithmisch gestrecktes Gitter

Wie bei Anderson [3] beschrieben, wird hier das Gitter in y -Richtung logarithmisch mittels folgender Gleichung gestreckt:

$$y = e^{(\Delta\eta \cdot m)} - 1 \quad (4.21)$$

während in x -Richtung keine Streckung vorhanden ist.

Daraus resultiert die größere Gitterpunktdichte an der Wand ($y = 0$), die Gitterschrittweite ist am oberen Rand am größten. Da in Gleichung (4.21) das Maß der Streckung allein durch den numerischen Wert des η -Intervalls im Rechengitter bestimmt ist, kann es sinnvoll sein, η - auf das Intervall $[0; 1]$ zu normieren und eine Streckungskonstante c einzuführen:

$$y = e^{c \cdot (\Delta\eta \cdot m)} - 1 \quad (4.22)$$

$$\Delta\eta = \frac{1}{M - 1} \quad (4.23)$$

mit $m = 0, 1, \dots, M$.

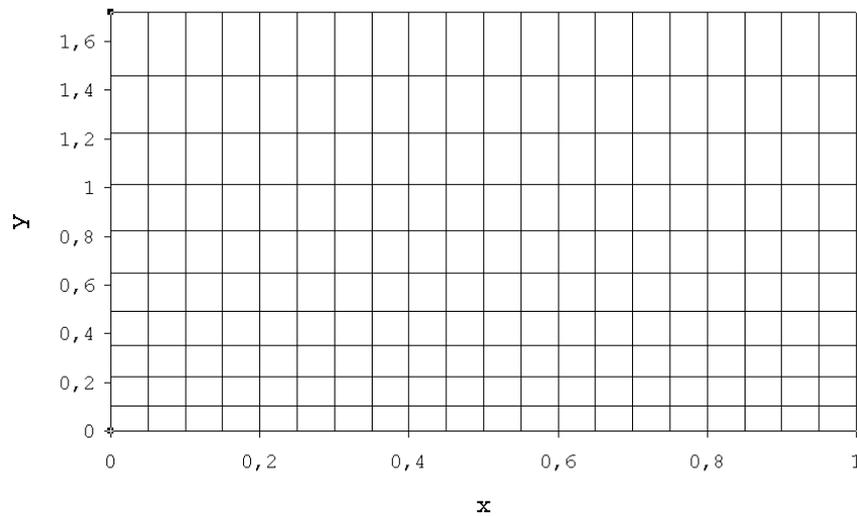


Abbildung 4.20: In y -Richtung Logarithmisch gestrecktes Gitter mit $c = 1$ und $0 \leq \eta \leq 1$

4.2.3.3 Kompressionsrampe

Um eine Rampe mittels einer analytischen Funktion zu modellieren, ist es notwendig eine Funktion zu finden, deren x -Ableitung einen Sprung aufweist. Adams [2] gelang dies durch eine Kombination von Logarithmus und Kosinus-Hyperbolicus. Darauf aufbauend wurde folgender Ansatz für das Gitter gewählt. Der Verlauf von y über x lautet:

$$y = a \cdot \left(x + \frac{\ln [\cosh (c (x - x_c))]}{c} - \frac{\ln [\cosh (c \cdot x_c)]}{c} \right) + y_1 \quad (4.24)$$

Die Anfangshöhe am linken Rand beträgt y_1 , c ist ein Maß für den Eckradius (je größer c ist, desto kleiner ist der Eckradius), x_c ist die x -Koordinate der Ecke und a ist ein Maß für die Steigung der Rampe.

Bei einem vorgegebenen Rampenwinkel ϕ berechnet sich a durch die Bestimmung der Steigung anhand von:

$$\tan(\phi) = \frac{y(x=L) - y(x=x_c)}{L - x_c} = \frac{y(x=L)}{L - x_c} \quad (4.25)$$

wobei L die Länge des Rechengebietes in x -Richtung angibt. Dies ergibt:

$$a = - \frac{\tan(\phi) c [L - x_c]}{-c \cdot L - \ln\{\cosh[c(L - x_c)]\} + \ln\{\cosh[c \cdot x_c]\}} \quad (4.26)$$

Hier bietet es sich wiederum an, die Koordinaten ξ und η des Rechenraumes auf das Intervall $[0; 1]$ zu normieren. In x -Richtung wurde zunächst eine äquidistante Diskretisierung gewählt:

$$x = x' + L \cdot \xi \quad (4.27)$$

Die Gleichungen (4.24) und (4.27) werden nun mit entsprechend zu wählenden Werten jeweils für den oberen (x_∞, y_∞) und den unteren Rand (x_w, y_w) gebildet. So ist es ohne weiteres möglich für die beiden Ränder unterschiedliche Längen, Rampenwinkel oder insbesondere Eckradien zu wählen. Letzteres ist insofern von Bedeutung, als daß es wünschenswert ist, einen möglichst gut ausgerundeten oberen Rand zu erhalten, um Reflexionen, die wieder auf die Wand treffen, zu vermindern. Andererseits soll an der Wand die Ecke möglichst wenig ausgerundet sein, d.h. ein großes c ist hier angebracht. Am unteren Rand gilt natürlich $y_1 = 0$, so daß der y_1 -Wert des oberen Randes die Höhe y'' des Integrationsgebietes am linken Rand angibt.

Nach der Definition der x - und y -Werte am oberen und unteren Rand wird nun das Gitter im Feld berechnet. Dies geschieht durch eine Interpolation zwischen Koordinaten des oberen und unteren Randes:

$$x_{(\xi, \eta)} = (1 - r_{(\eta)}) \cdot x_w(\xi) + r_{(\eta)} \cdot x_\infty(\xi) \quad (4.28)$$

$$y_{(\xi, \eta)} = (1 - r_{(\eta)}) \cdot y_w(\xi) + r_{(\eta)} \cdot y_\infty(\xi) \quad (4.29)$$

Die Interpolation in y -Richtung erfolgt durch einen exponentiellen Ansatz:

$$r_{(\eta)} = \frac{e^{(d \cdot \eta)} - 1}{e^d - 1} \quad (4.30)$$

wodurch sich an der Wand eine größere Gitterpunktdichte ergibt. Die Größe d gibt dabei das Maß der Stauchung in y -Richtung an. In Abbildung 4.21 ist beispielhaft ein solches Gitter dargestellt.

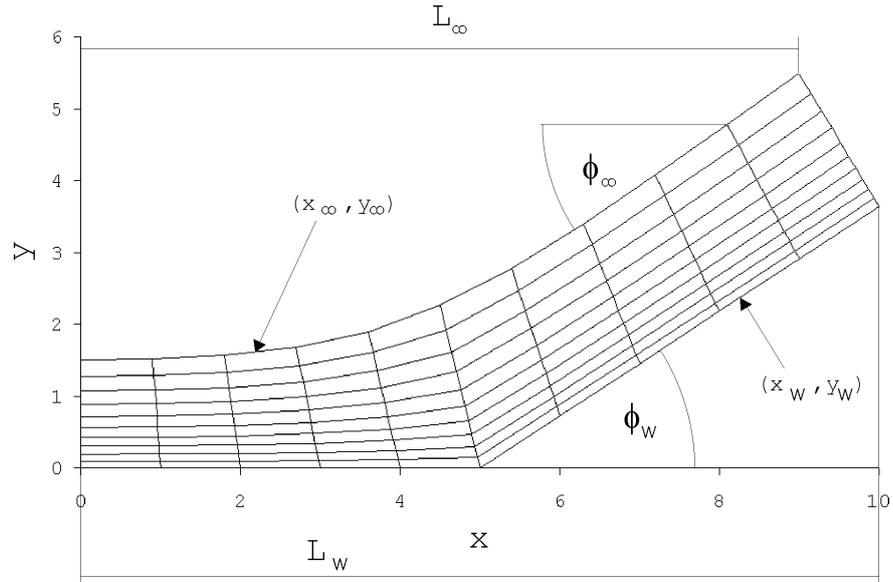


Abbildung 4.21: Beispiel für ein Gitter über einer Kompressionsrampe

4.2.4 Validierungsrechnungen

Um die korrekte Implementierung des modifizierten Verfahrens zu überprüfen, wurden Simulationen einer ebenen Plattengrenzschicht sowohl mit gestrecktem Gitter als auch mit der ursprünglichen Programmversion durchgeführt und miteinander verglichen. Da die hierbei verwendeten Gitterstreckungen (Abschnitt 4.2.3.1 und 4.2.3.2) ebenfalls ein Integrationsgebiet über einer ebenen Platte beschreiben, sollten bei einer korrekten Implementierung die gleichen Ergebnisse erzielt werden. Zusätzlich werden auch die Schrittweiten variiert.

4.2.4.1 Gitterstreckung in x-Richtung

Hier werden die Rechenergebnisse unter Verwendung der Holst-Transformation (Abschnitt 4.2.3.1) mit denen der ursprünglichen Programmversion verglichen. In Abbildung 4.22 sieht man deutlich die geforderte Übereinstimmung, die Werte des ungestreckten und gestreckten Gitters liegen exakt aufeinander. Selbst bei der äußerst sensitiven Größe c_f ist keine Abweichung erkennbar.

4.2.4.2 Gitterstreckung in y-Richtung

Als gestrecktes Gitter wird nun das logarithmisch gestreckte Gitter (Abschnitt 4.2.3.2) dem Rechenergebnis des ursprünglichen Programms gegenübergestellt (siehe Abbildung 4.23). Innerhalb des Feldes ergibt sich eine gute Übereinstimmung, sowohl bei den Profilen der Strömungsgrößen, als auch beim Verlauf des Schubspannungsbeiwertes. Probleme sind allerdings am rechten Rand vorhanden. Dies zeigt sich zum einen am Verlauf der Schubspannung - am rechten Rand nimmt die Schubspannung stark ab - jedoch besonders deutlich ist der Fehler anhand der Druckprofile erkennbar. Direkt am rechten Rand ($x = 13.5292$) weicht der Druck vor allem an der Wand erheblich von den Werten der Rechnung mit äquidistantem Gitter ab. Allerdings zeigte sich in weiteren Rechnungen, daß sich

dieser Fehler nicht stromauf ausbreitet, so daß dieser Fehler durch ein Abschneiden in x -Richtung ausgeglichen werden kann.

4.2.4.3 Zusammenfassende Bewertung

Die Validierungsrechnungen liefern eine hervorragende Übereinstimmung, vor allem bei einer alleinigen Streckung in x -Richtung sind keinerlei Abweichungen erkennbar. Besonders bemerkenswert ist die hervorragende Übereinstimmung der sehr empfindlich reagierenden Werte der Wandschubspannung.

Anhand der Gitterstreckung in y -Richtung sieht man die noch vorhandenen Schwierigkeiten. Insbesondere die Differenzen am rechten Rand bereiten Probleme, die unter bestimmten Bedingungen sogar zum Absturz des Verfahrens führen können, weshalb eine genauere Untersuchung der Implementierung ratsam ist. Ein weiteres beobachtetes Phänomen ist, daß das Vorschreiben der Blasius Grundströmung nicht nur am linken Rand, sondern einige Gitterpunkte weiter, eine deutliche bessere Übereinstimmung der Genauigkeit bei der Wandschubspannung bewirkte. Aus diesem Grund wird die Grundströmung der Grenzschichttheorie auch noch zwei Punkte rechts des linken Randes fest vorgeschrieben. Auch diese Problematik sollte noch näher betrachtet werden. Da beides Effekte an den Rändern des Integrationsgebietes sind, ist es möglich, daß das Problem durch die räumliche Diskretisierung in Randnähe verursacht wird, die ja aufgrund des Randes gesondert vom Feld betrachtet werden muß.

Angepaßt werden sollte noch die Berechnung der CFL-Zahl, d.h. daß in Gleichung 3.23 die Schrittweiten in Abhängigkeit der Gitterposition berechnet werden.

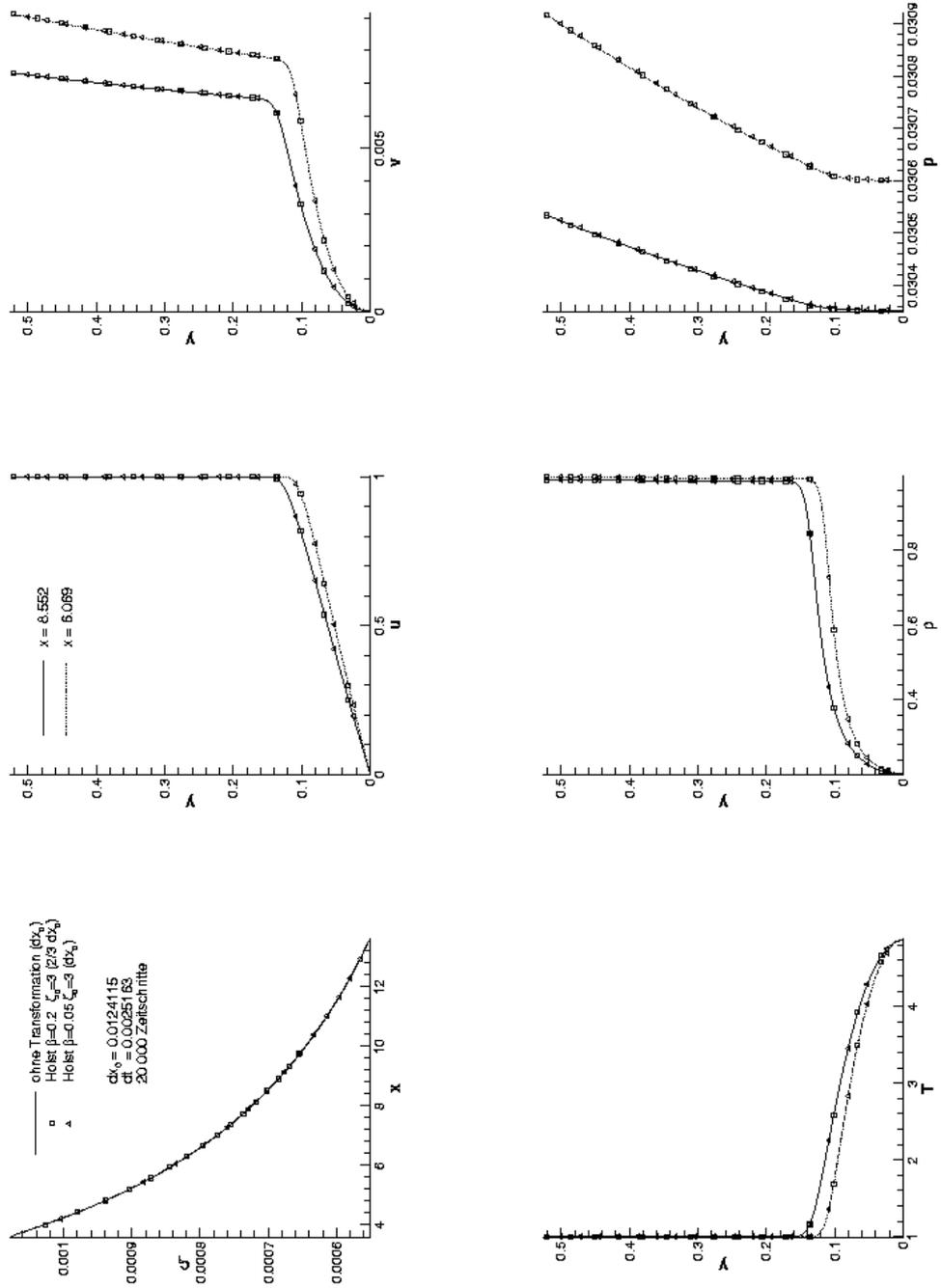


Abbildung 4.22: Vergleich der Ergebnisse aus Simulationen mit Holst-Transformation mit den Ergebnissen aus der Simulation mit untransformiertem Gitter

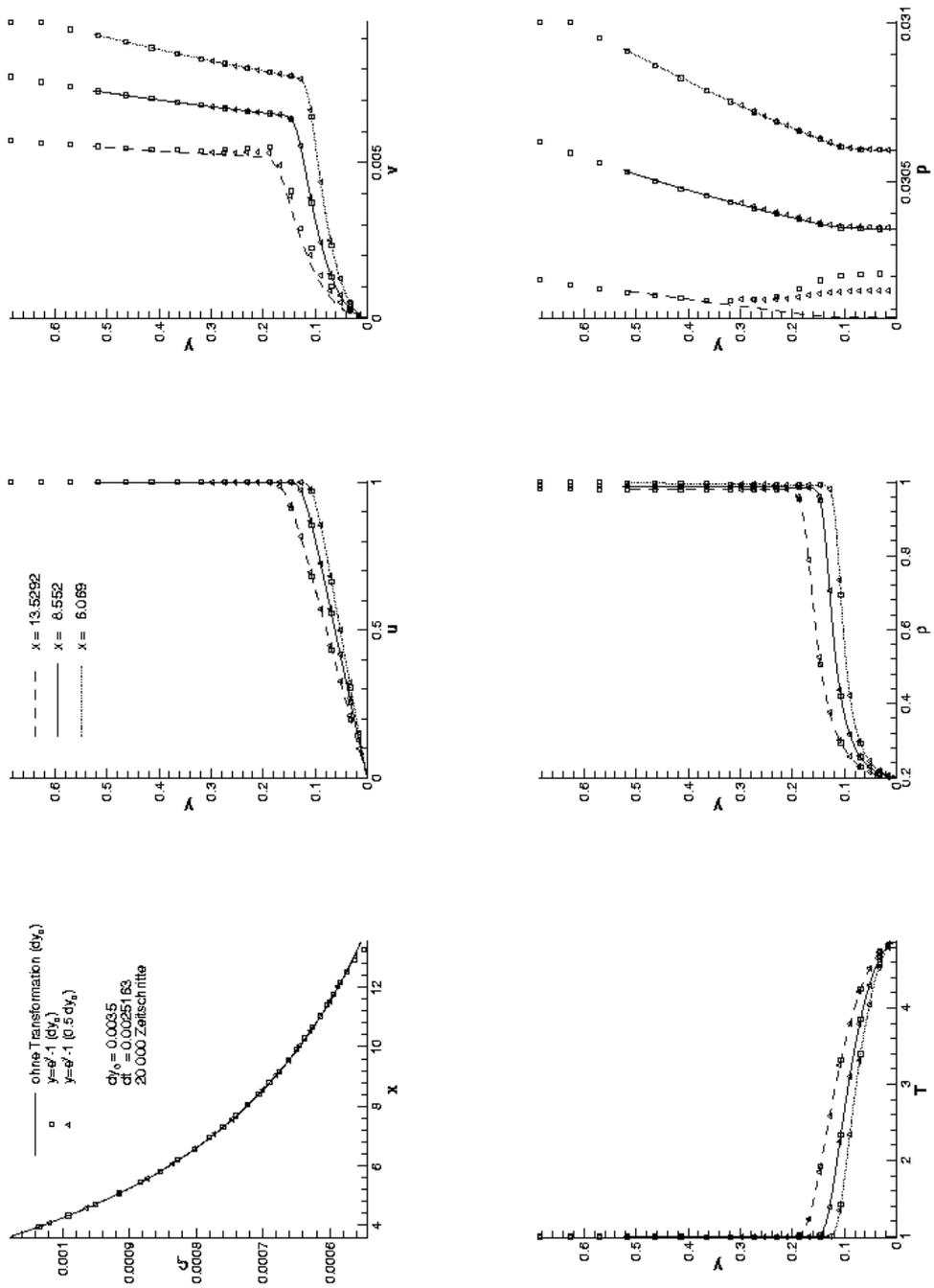


Abbildung 4.23: Vergleich der Ergebnisse aus Simulationen mit logarithmisch skaliertem Gitter mit den Ergebnissen aus der Simulation mit untransformiertem Gitter

4.2.5 Kompressionsrampe

Ziel der Gittertransformation ist die Berechnung von Strömungen über komplexeren Geometrien, z.B. einer Kompressionsrampe. Insbesondere bei Überschallströmungen, wie sie hier untersucht werden, sind Kompressionsrampen häufig auftretende Geometrien, so z.B. bei Triebwerkseinläufen von Überschallfluggeräten. Die Abbildungen 4.24 und 4.25 zeigen die stationäre Strömung über Kompressionsrampen mit den Rampenwinkeln gegenüber der Anströmung von 8° und 10° bei einer Anströmmachzahl von 4.8 und einer Anströmtemperatur von $55.4 K$.

Anhand der Dichteverläufe ist deutlich erkennbar, wie sich der Verdichtungsstoß aufbaut. Am Knickpunkt entstehen Kompressionswellen, die außerhalb des Integrationsgebietes zu einem Stoß zusammenlaufen. Aufgrund der Verdrängungswirkung bildet sich ein Druckanstieg aus, was die Grenzschicht aufdickt und zur Ablösung führt. Durch die dickere Grenzschicht entstehen schwächere Kompressionswellen bereits vor dem Knick. Im Bereich der Wiederanlagezone ist die Grenzschicht dünner als vor dem Knick. Der gleiche Effekt tritt auch bei der Stoß-Grenzschicht-Interaktion der ebenen Platte auf, wie in Abbildung 1.2 zu sehen ist. Die Länge der Ablöseblase, erkennbar durch die negative Wandschubspannung, ist abhängig vom Rampenwinkel und damit von der resultierenden Stoßstärke. Erkennbar ist, daß die erneute Abnahme von c_f innerhalb der Ablöseblase bei beiden Rampenwinkeln ungefähr am Knick liegt, die Größe der c_f -Abnahme ist allerdings stark vom Rampenwinkel abhängig.

Insbesondere bei einem Rampenwinkel von 10° zeigen sich die Schwächen des oberen Randes. An der Stelle $x \approx 13$ wird die erzeugte Kompression am oberen Rand reflektiert. Dies spiegelt sich auch im c_f -Verlauf an der Stelle $x \approx 11.3$ wieder, wo eine leichte Störung erkennbar ist. Das Auftreffen der am oberen Rand reflektierten vorderen, leichteren Kompressionswellen auf die Wand erzeugt diese Beule im c_f -Verlauf. In abgeschwächter Form ist dies auch bei einem Rampenwinkel von 8° erkennbar.

Vergleicht man die Wandschubspannungsverläufe der Kompressionsrampe (Abbildungen 4.24 und 4.25) mit dem Wandschubspannungsverlauf der Stoß-Grenzschicht-Interaktion an der ebenen Platte (Abbildung 4.4), so sieht man deutlich Gemeinsamkeiten beider Simulationen. Dieser Zusammenhang dürfte im Hinblick auf die Theorie der freien Interaktion, wie sie bei Délerly [6] beschrieben ist, von Bedeutung sein.

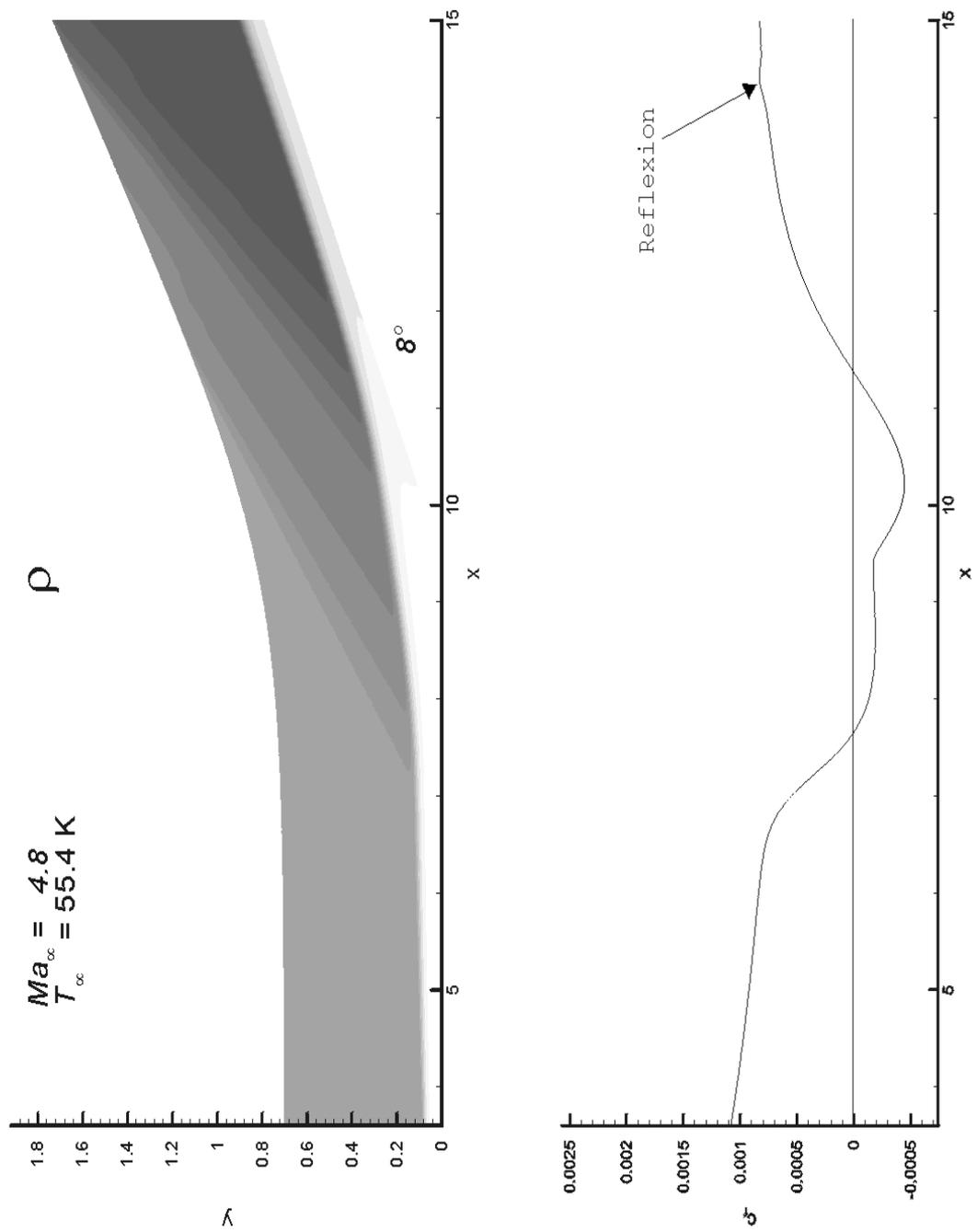


Abbildung 4.24: Strömung über eine Kompressionsrampe mit einem Winkel von 8°

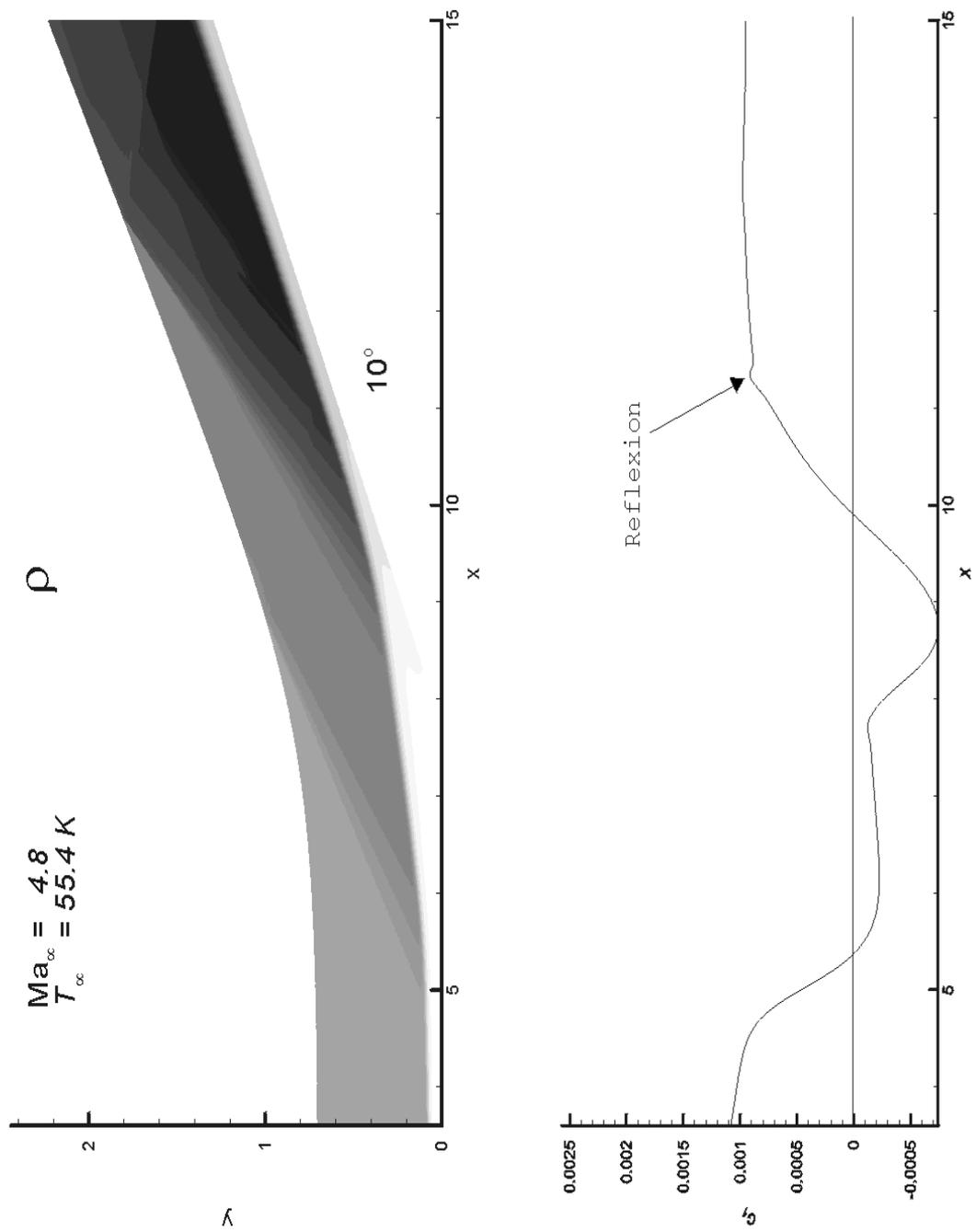


Abbildung 4.25: Strömung über eine Kompressionsrampe mit einem Winkel von 10°

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Oszillierender Stoßwinkel

Die Simulationen zeigen, daß sich aus der Interaktion der Störwellen und deren Reflexionen an der Wand außerhalb der Grenzschicht ein charakteristisches Interferenzmuster (Abbildung 4.1), hervorgerufen von den Stoßwellen selbst und deren Reflexion an der Wand, einstellt. Eine zusätzliche Rechnung mit einer Frequenz von $\omega_0 = 3$ zeigt dies ebenfalls. Die Analyse der Amplituden ergibt, daß deren qualitative Verläufe unabhängig von der Amplitude der Störانregung sind (siehe Abschnitt 4.1.1.1). Innerhalb der Grenzschicht können analog zu Krause [11] drei Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Störungen identifiziert werden, außerhalb der Grenzschicht breiten sich die Störungen ungefähr mit Schallgeschwindigkeit aus (siehe Abschnitt 4.1.1.2).

Die Analyse der Störwellen nach Abschalten der Störung ermöglicht die Detektierung von Tollmien-Schlichting-Wellen (siehe Abschnitt 4.1.2), die sich mit ca. $\frac{1}{3}$ Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Die Tollmien-Schlichting-Wellen weisen recht genau dieselbe Frequenz wie die Störانregung auf. Aufgrund von Schwebungsknoten (Abbildung 4.13), die sich aus der zeitlichen Fourieranalyse ergeben, können mittels einer räumlichen Fouriertransformation die Wellenzahlen ermittelt werden, die eine gute Übereinstimmung mit der linearen Stabilitätstheorie [13] aufweisen (siehe Abschnitt 4.1.2.3). Das Abschalten der Störung regt zusätzliche Frequenzen an, wodurch ein weiteres Zerlegen des Signals kaum mehr möglich erscheint.

Sinnvoll erscheint ein längeres Rechengebiet nach dem Auftreffpunkt des Stoßes. Dadurch könnte unter Anderem geklärt werden in wiefern größerer Wellenlänge an den Störungen beteiligt sind. Vielversprechend erscheint ein von Tumin [19] entwickeltes Verfahren, daß die Zerlegung auch komplexer Signale verspricht. Noch zu untersuchen ist die Abhängigkeit der Störungen von der Störfrequenz. Des weiteren könnte eine weitergehende dreidimensionale Simulation Aufschluß darüber geben, inwiefern dreidimensionale Effekte eine Rolle spielen.

5.2 Gittertransformation

Das Verfahren konnte soweit modifiziert werden, daß nun Strömungen über beliebige Wandgeometrien berechnet werden können. Die Validierungsrechnungen zeigen eine hervorragende Übereinstimmung der Ergebnisse der gestreckten Gitter mit denen des äquidistanten Gitters, was besonders bei der sehr sensitiven Größe der Wandschubspannung deutlich wird. Erste Untersuchungen einer stationären Strömung über einer Kompressionsrampe (Abschnitt 4.2.5) zeigen eine ausgeprägte Ablöseblase und neben der Kompression am Rampenknicke eine schwächere Verdichtung am Beginn der Ablöseblase, hervorgerufen durch die dort aufgedickte Grenzschicht.

Probleme ergeben sich am rechten Rand bei einer Gitterstreckung normal zur Wand (Abschnitt 4.2.4.2). Auch wenn sich der Fehler nicht weiter stromauf ausbreitet, sollte dieses Problem behoben werden, da es unter bestimmten Umständen auch zum Absturz des Verfahrens führen kann. Des weiteren ist zu untersuchen, warum ein festschreiben der Blasius-Grundströmung nicht nur am linken Rand sondern auch einige Punkte davon entfernt eine deutlich bessere Übereinstimmung bei den Validierungsrechnungen liefert.

Sind diese Probleme behoben können auch Rechnungen mit periodisch eingebrachten Störungen durchgeführt werden. Zur Zeit wird das ergänzende dreidimensionale Verfahren um die Gittertransformation erweitert, so daß auch dreidimensionale Störrechnungen über anderen Geometrien als der ebenen Platte durchgeführt werden können.

Literaturverzeichnis

- [1] **Adams, N.A.**, „Numerische Simulation von Transitionsmechanismen in kompressiblen Grenzschichten“, DLR-FB 93-29, DLR-Göttingen (1993)
- [2] **Adams, N.A.**, „Direct numerical simulation of turbulent compression ramp flow“, Theoretical and Computational Fluid Dynamics (1998)
- [3] **Anderson, J.D.**, „Computational Fluid Dynamics“, McGraw-Hill Companies (1995), Seite 168-192
- [4] **Bestek, H.**, „Numerische Untersuchungen zur nichtlinearen räumlichen Strömungsanfischung in der ebenen Poiseuille-Strömung“, Dissertation an der Universität Stuttgart (1980), Seite 42-45
- [5] **Eißler, W.**, „Numerische Untersuchungen zum laminar-turbulenten Strömungsumschlag in Überschallgrenzschichten“, Dissertation, Universität Stuttgart (1995)
- [6] **Déleury, J., Marvin, J.G.**, „Shock-Wave Boundary Layer Interactions“, AGARDograph Vol. 280 (1986)
- [7] **Gottlieb, D., Turkel, E.**, „Dissipative two-four methods for timedependent problems“, Math. Comp. 30 (1976), S. 703-723
- [8] **Harris, P.J., Fasel, H.F.**, „Numerical investigation of unsteady plane wakes at supersonic speeds“, AIAA paper 96-0686 (1996)
- [9] **Hirsch, C.**, „Numerical computation of internal and external flows I“, John Wiley & Sons (1988), S. 31
- [10] **Kloker, M.**, „Direkte numerische Simulation des laminar-turbulenten Strömungsumschlages in einer stark verzögerten Grenzschicht“, Dissertation, Universität Stuttgart (1993)
- [11] **Krause, O.**, „Numerische Simulation der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung eines instationären Stoßes bei $Ma=2.0$ an der ebenen Platte“, Diplomarbeit, Universität Stuttgart (2001)
- [12] **Lele, S.K.**, „Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution“, Journ. Comp. Oh. 103 (1992), S.16-42
- [13] **Mack, L.M.**, „Boundary Layer Stability Theory“, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena (1969)
- [14] **Pagella, A.**, „Numerische Simulation der Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkung an der ebenen Platte“, Diplomarbeit, Universität Stuttgart (1999)

- [15] **Pagella, A., Rist, U., Wagner, S.**, „Numerical Investigations of Small-Amplitude Disturbances in a Laminar Boundary Layer with Impinging Shock Waves“, New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics III, Springer (2001)
- [16] **Prandtl, L., Oswatitsch, K., Wieghardt, K.**, „Führer durch die Strömungslehre“, 9.Auflage, Vieweg-Verlag (1992), S. 357
- [17] **Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery, B.**, „Numerical Recipes in Fortran 77“, Cambridge University Press (1993), Seite 547 <http://www.nr.com>
- [18] **Schlichting, H., Gersten, K.**, „Grenzschicht-Theorie“, 9.Auflage, Springer-Verlag (1997), Seiten 31, 264-288, 423-435
- [19] **Tumin, A.**, „Multimode Decomposition in compressible Boundary Layers“, Extended Abstract, University of Arizona, Tucson (2002)
- [20] **Wagner, S.**, „Skript zur Pflichtvorlesung Strömungslehre im Studiengang der Luft- und Raumfahrttechnik“, Universität Stuttgart, 4. Auflage (1996), Seite 336-338
- [21] **Weinstein, L.**, „Schlieren photograph of T-38 shock waves“, Photo Collection, NASA Dryden Flight Research Center, Photo Nr. EC94-42528-1 (1993), <http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/Schlieren/HTML/EC94-42528-1.html>

Anhang A

Maximale Amplituden der Störrechnung

Hier sind die maximalen Amplituden der ersten vier harmonischen Frequenzen aller Strömungsgrößen für Amplituden von $0,25^\circ$ und $0,5^\circ$. Dieser Teil des Anhangs dient als Ergänzung zu Abschnitt 4.1.1.1.

A.1 Kleine Amplitude von $0,25$ Grad

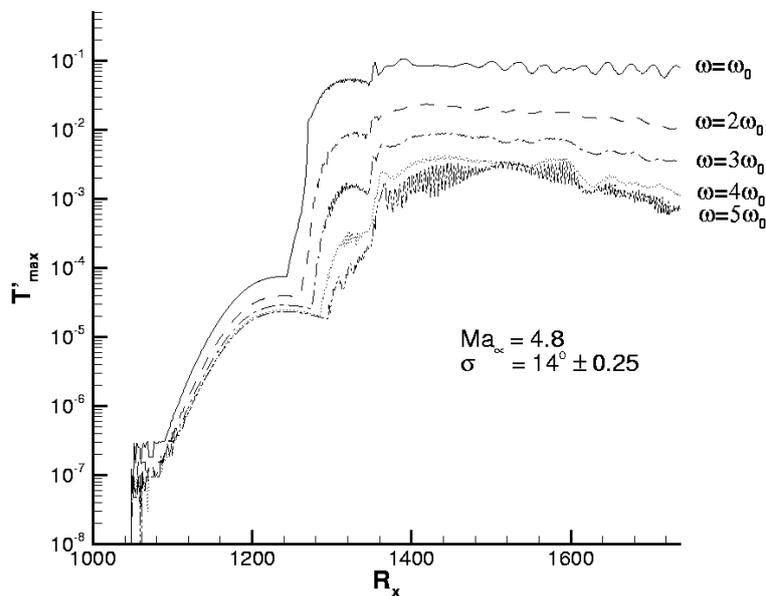


Abbildung A.1: Maximale Amplituden der ersten Moden der Temperatur bei einer Störampplitude von $0,25^\circ$

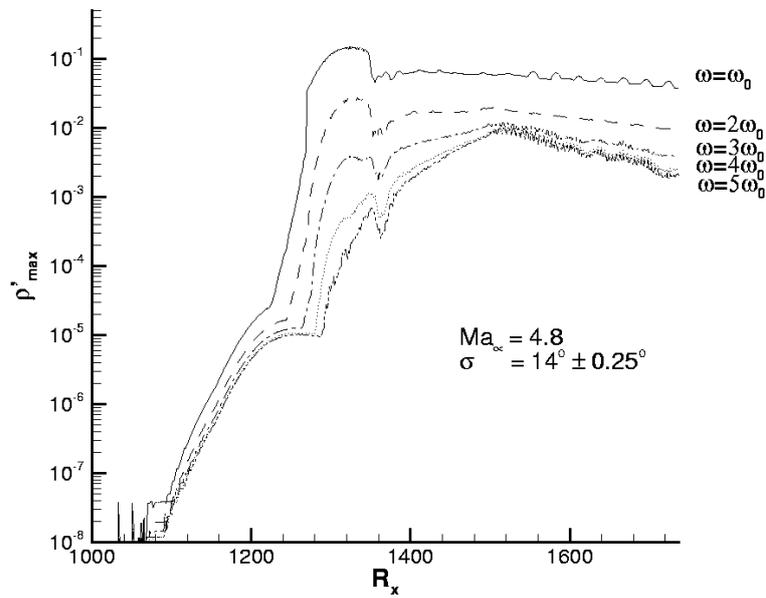


Abbildung A.2: Maximale Amplituden der ersten Moden der Dichte bei einer Störampplitude von $0,25^\circ$

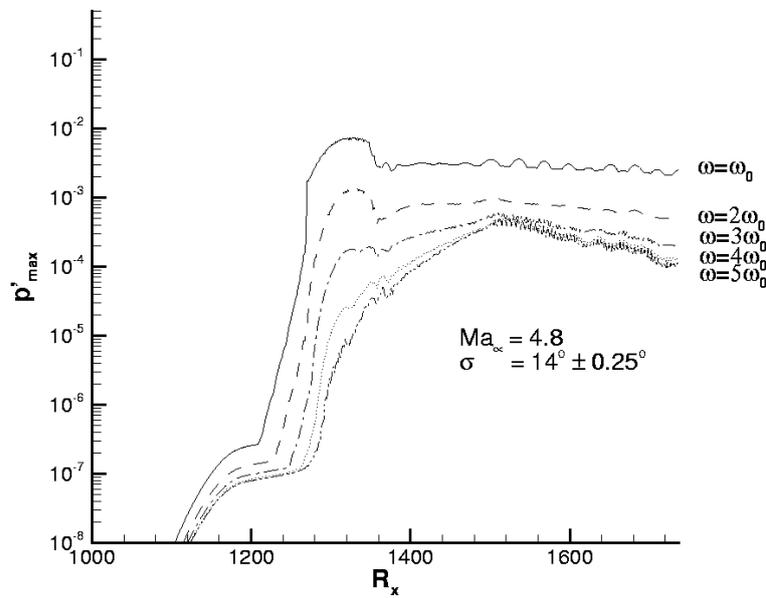


Abbildung A.3: Maximale Amplituden der ersten Moden des Druckes bei einer Störampplitude von $0,25^\circ$

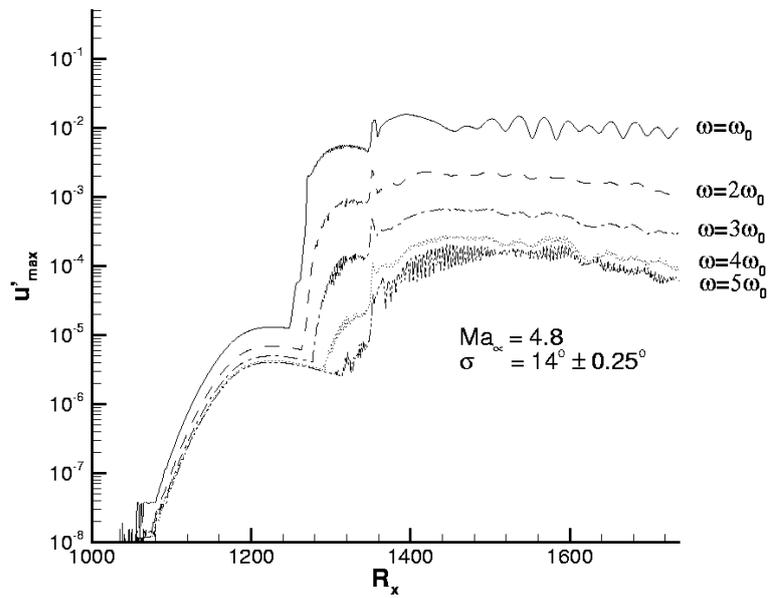


Abbildung A.4: Maximale Amplituden der ersten Moden der Geschwindigkeit in x -Richtung bei einer Stör-Amplitude von $0,25^\circ$

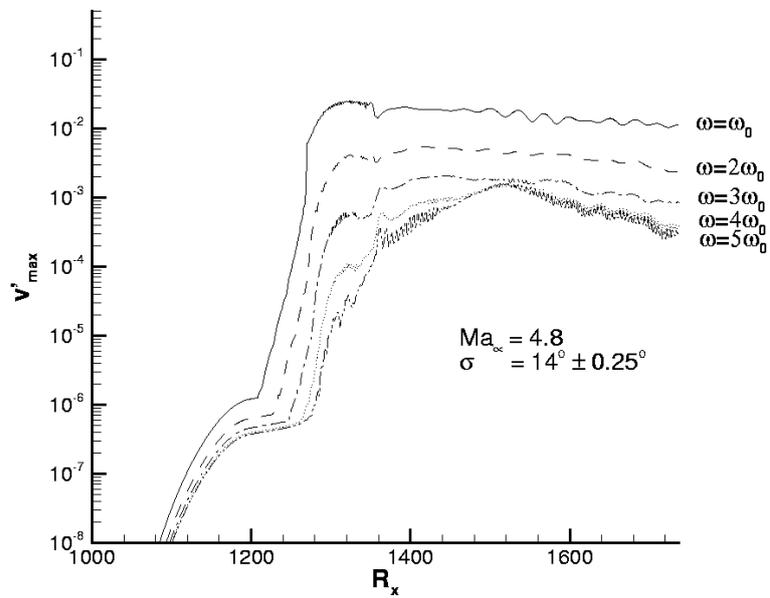


Abbildung A.5: Maximale Amplituden der ersten Moden der Geschwindigkeit in y -Richtung bei einer Stör-Amplitude von $0,25^\circ$

A.2 Große Amplitude von 0,5 Grad

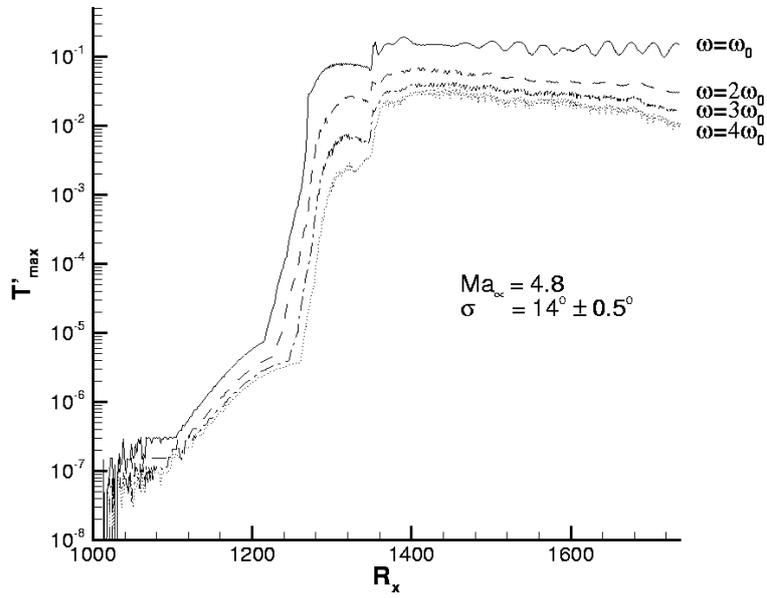


Abbildung A.6: Maximale Amplituden der ersten Moden der Temperatur bei einer Störampplitude von $0,5^\circ$

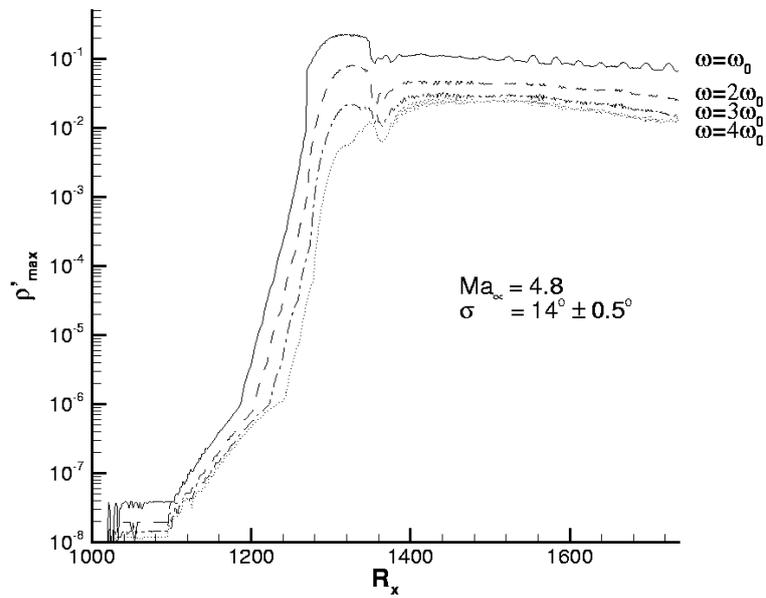


Abbildung A.7: Maximale Amplituden der ersten Moden der Dichte bei einer Störampplitude von $0,5^\circ$

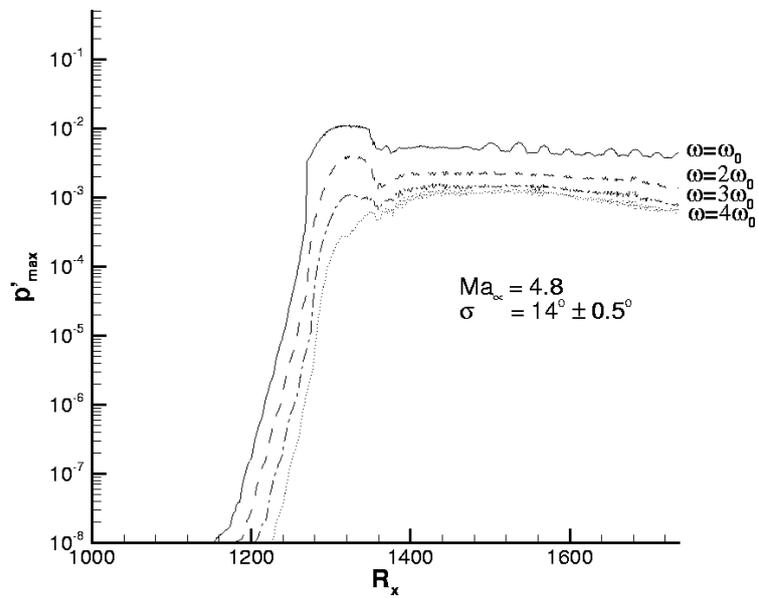


Abbildung A.8: Maximale Amplituden der ersten Moden des Druckes bei einer Störampplitude von $0,5^\circ$

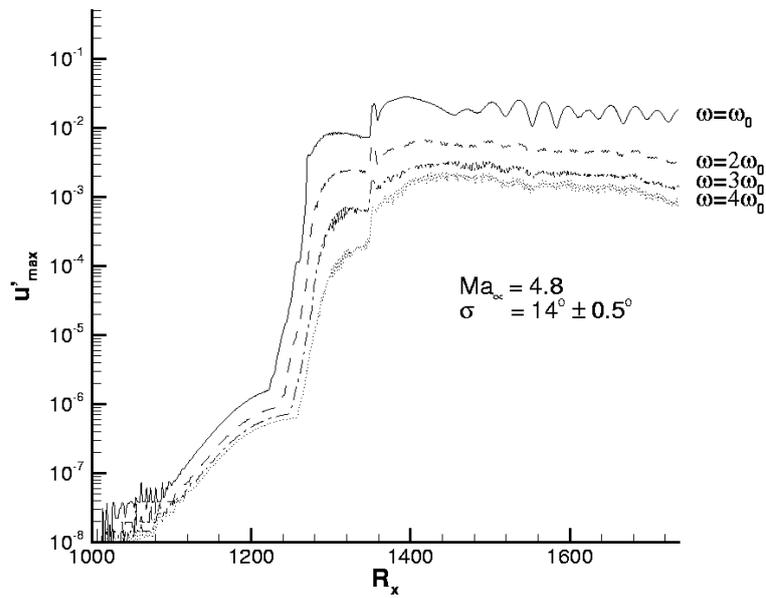


Abbildung A.9: Maximale Amplituden der ersten Moden der Geschwindigkeit in x -Richtung bei einer Störampplitude von $0,5^\circ$

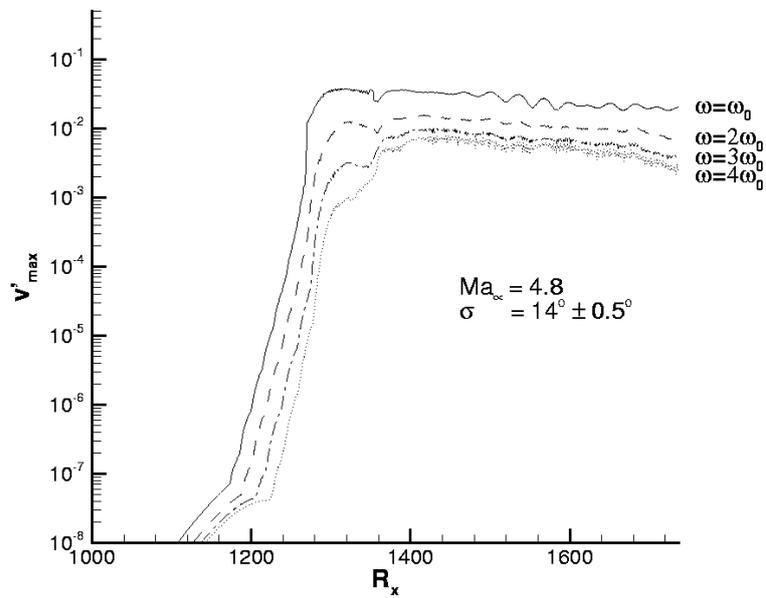


Abbildung A.10: Maximale Amplituden der ersten Moden der Geschwindigkeit in y -Richtung bei einer Störampplitude von $0,5^\circ$

Anhang B

Wellenzahlen der Instabilitätswellen

Die folgenden Diagramme B.1 bis B.5 dienen als Ergänzung zu Abschnitt 4.1.2.2. Die räumliche Fourieranalyse erfolgt in einem Intervall zwischen zwei Schwebungsknoten der jeweiligen Strömungsgröße (siehe Abbildung 4.13). Die Intervalle der einzelnen Störgrößen in x -Richtung wurden festgelegt zu:

$$\begin{aligned} T: & 1528 \leq R_x \leq 1719 \\ \rho: & 1529 \leq R_x \leq 1701 \\ p: & 1567 \leq R_x \leq 1716 \\ u: & 1620 \leq R_x \leq 1728 \\ v: & 1599 \leq R_x \leq 1726 \end{aligned}$$

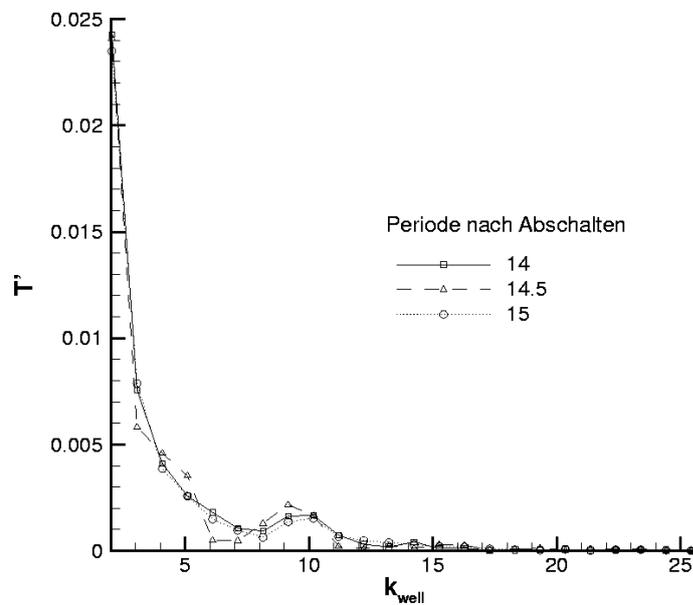


Abbildung B.1: Räumliche Fouriertransformation der Temperatur

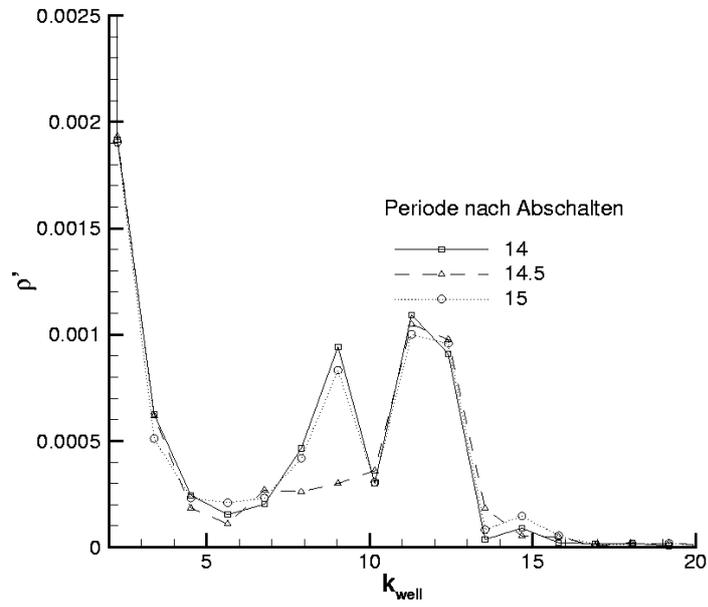


Abbildung B.2: Räumliche Fouriertransformation der Dichte

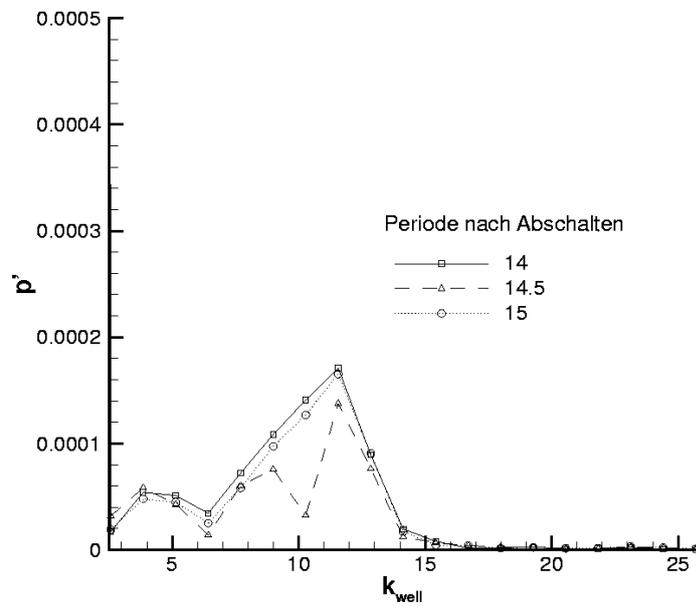


Abbildung B.3: Räumliche Fouriertransformation des Druckes

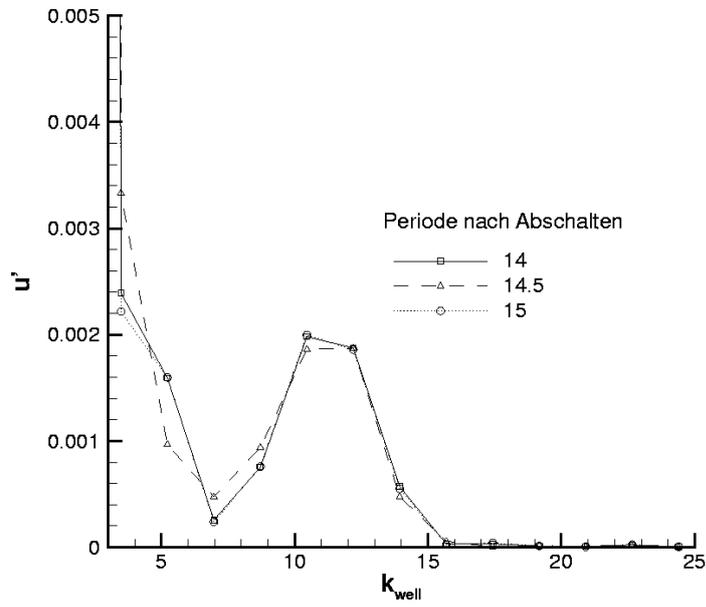


Abbildung B.4: Räumliche Fouriertransformation der Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung

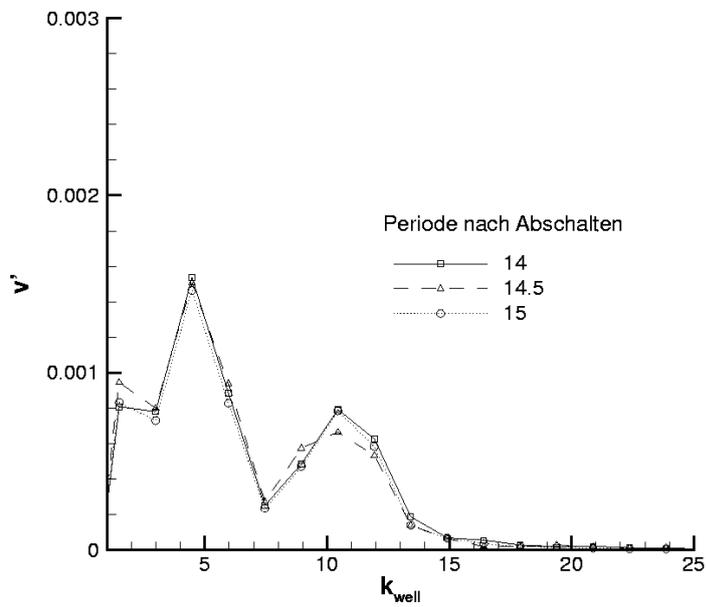


Abbildung B.5: Räumliche Fouriertransformation der Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung

Anhang C

Vergleich mit der linearen Stabilitätstheorie

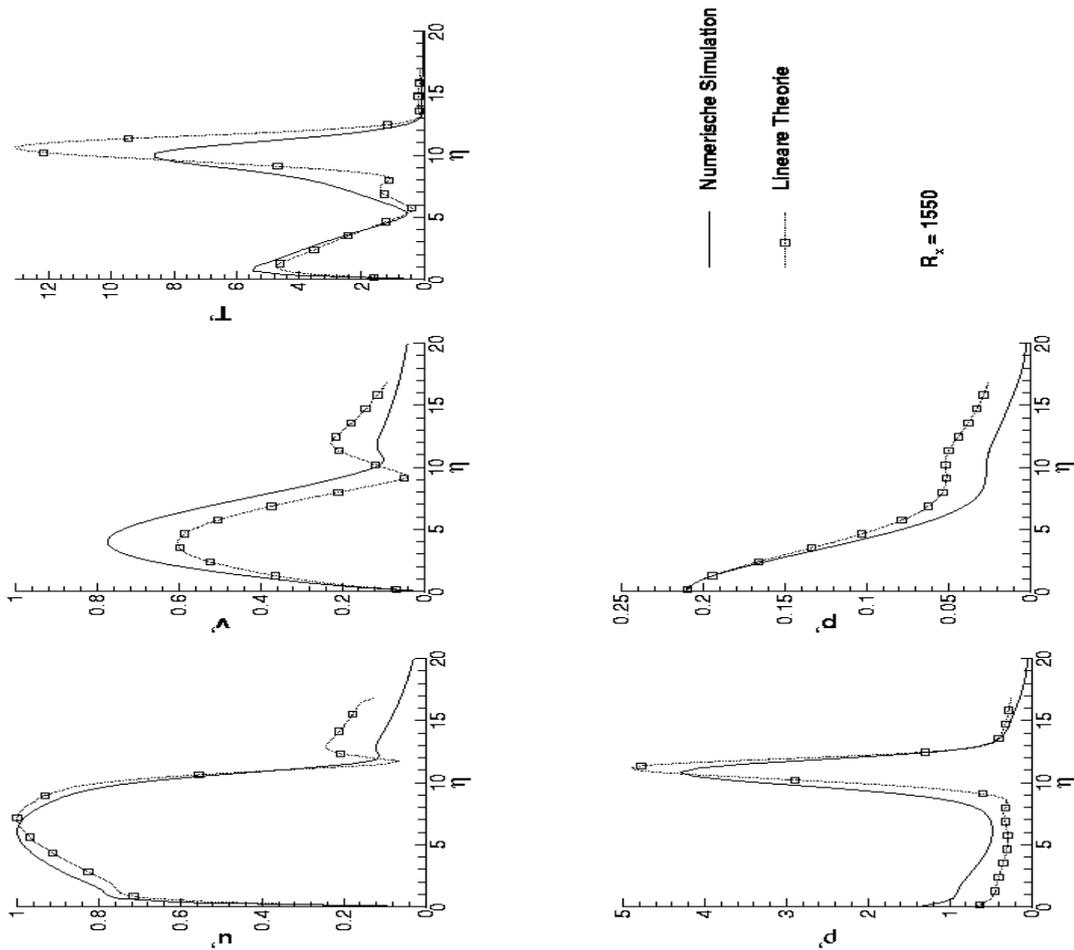


Abbildung C.1: Vergleich der Amplitudenverteilung in wandnormaler Richtung der DNS mit den Eigenfunktionen der kompressiblen, linearen Stabilitätstheorie an der Stelle $Re_x = 1550$

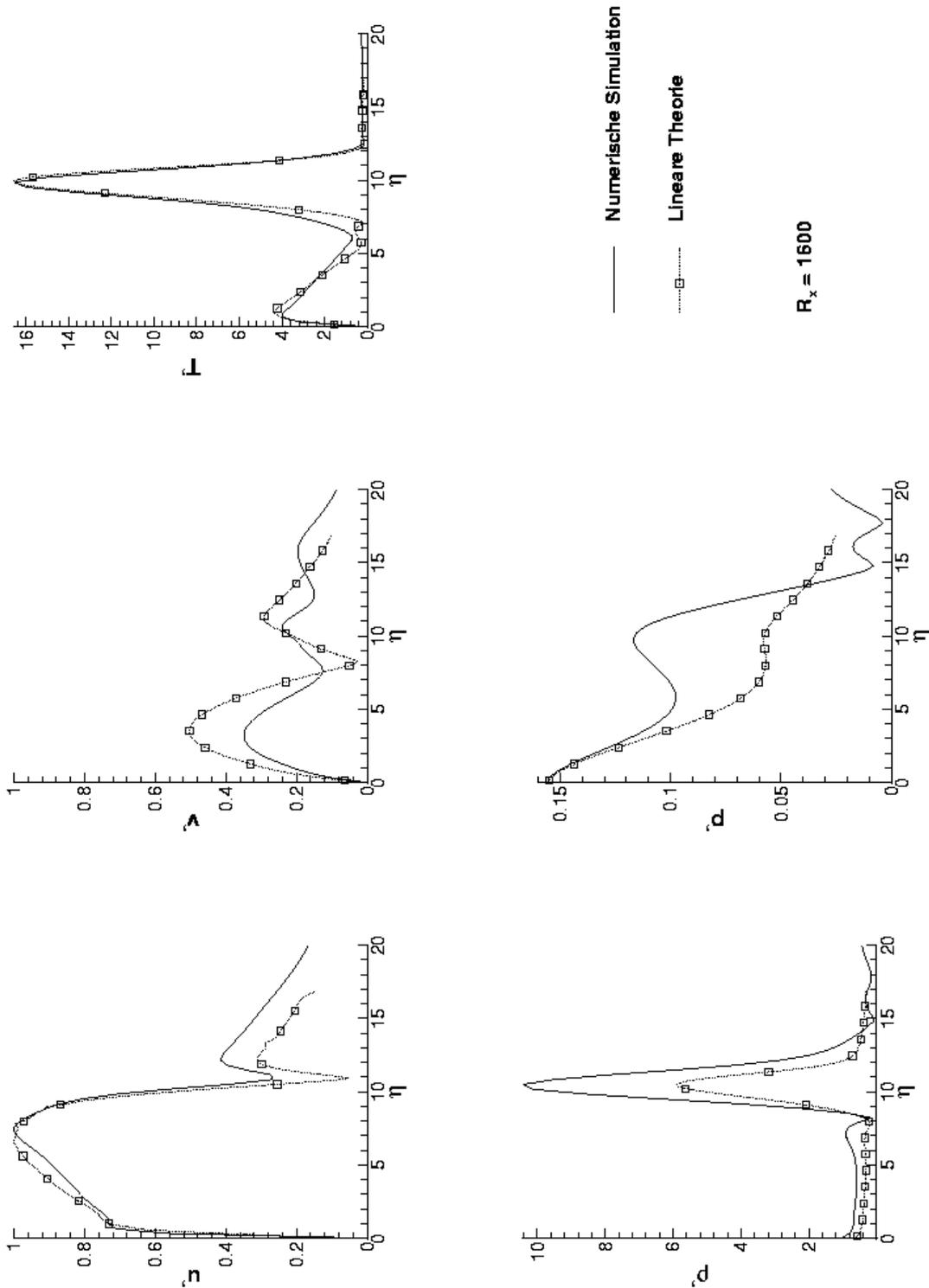


Abbildung C.2: Vergleich der Amplitudenverteilung in wandnormaler Richtung der DNS mit den Eigenfunktionen der kompressiblen, linearen Stabilitätstheorie an der Stelle $R_x = 1600$

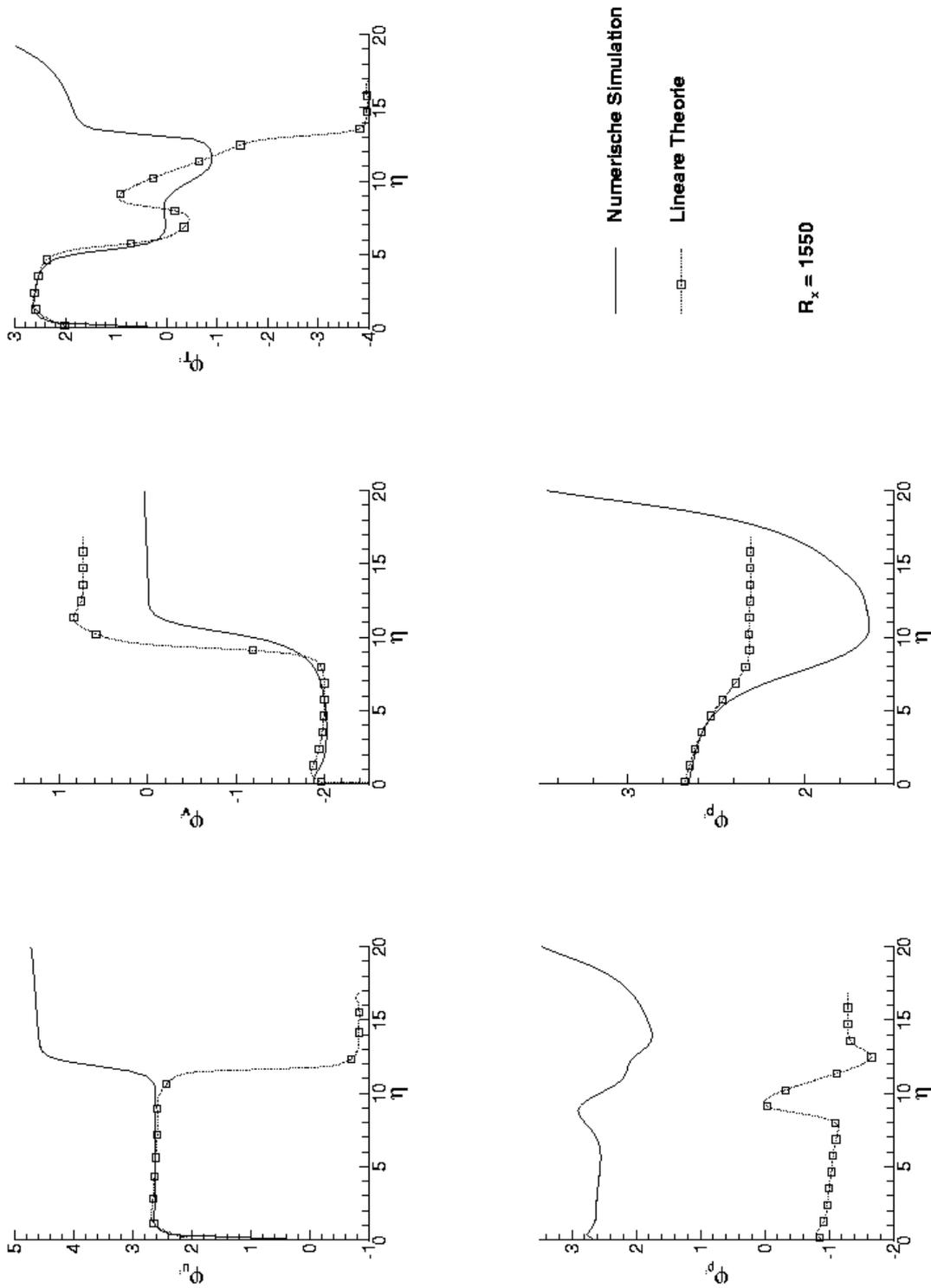


Abbildung C.3: Phasenvergleich [rad] der DNS mit der kompressiblen, linearen Stabilitätstheorie an der Stelle $R_x = 1550$

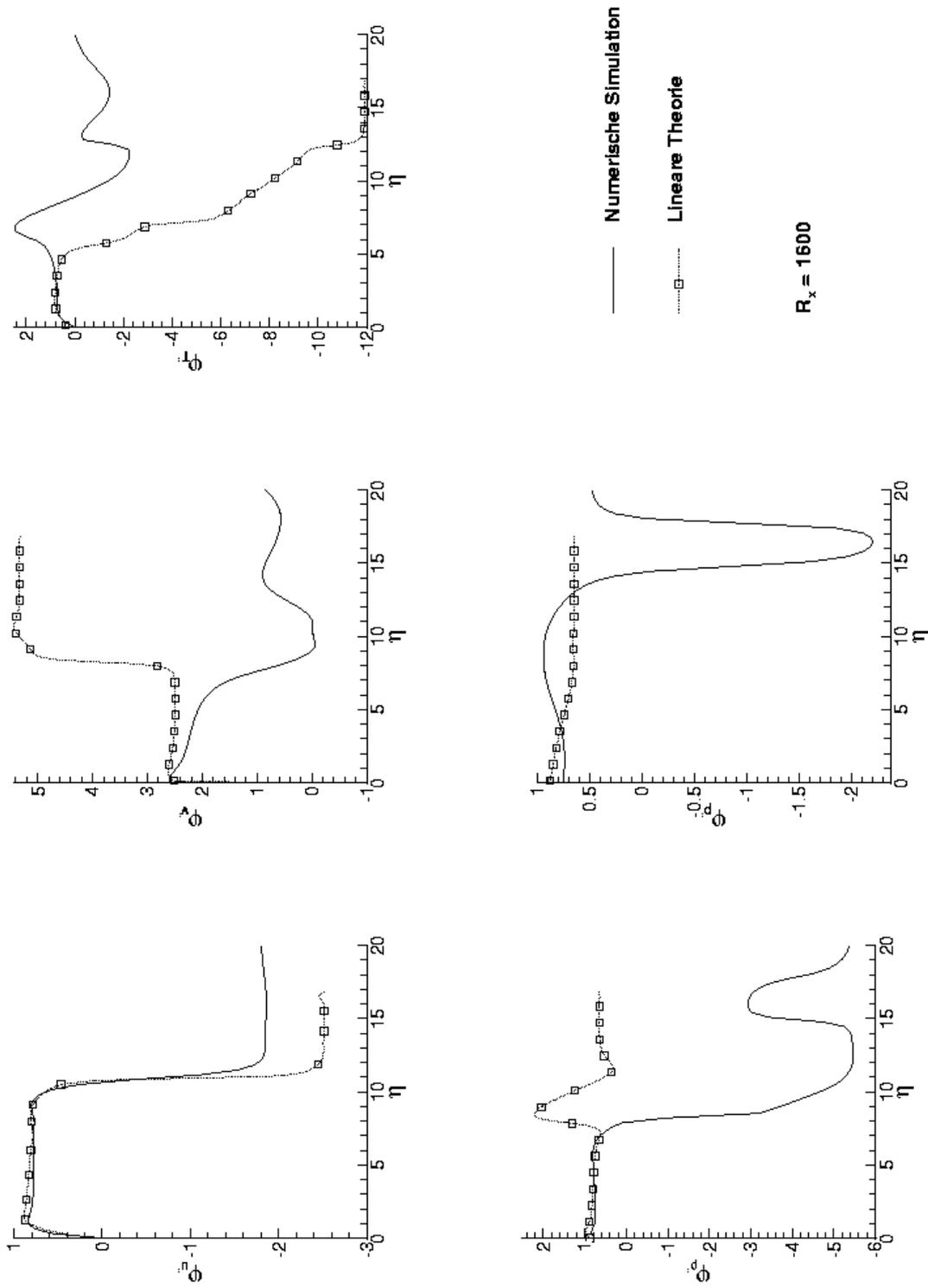


Abbildung C.4: Phasenvergleich [rad] der DNS mit der kompressiblen, linearen Stabilitätstheorie an der Stelle $R_x = 1600$